Contrôle No 1

EXERCICE 1 [3pts] Écrire sous forme canonique les fonctions suivantes :

$$P(x) = x^2 + 6x + 2 \qquad Q(x) = x^2 - 3x + 1 \qquad R(x) = 2x^2 + 8x + 16$$

EXERCICE 2 [4pts] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne : $U_n = 5n + 4$

1. Calculer $U_0, \quad U_1, \quad U_2, \quad U_3$.
2. Exprimer U_{n+1} en fonction de n
3. En déduire que $U_{n+1} - U_n = 5$
4. A quelle famille appartient cette suite (U_n) ? Quelle est sa raison ?

EXERCICE 3 [2pts] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne : $U_{n+1} = 2U_n + 4$ et $U_0 = 3$

1. Calculer $U_1, \quad U_2, \quad U_3$.
2. Pourquoi cette suite n'est-elle pas arithmétique ?
3. Pourquoi cette suite n'est-elle pas géométrique ?

EXERCICE 4 [3pts] Sachant que U est arithmétique, que $U_5 = 45$ et que $U_{10} = 125$,

1. Calculer R puis U_0 puis U_{32}
2. En déduire $S = U_0 + \cdots + U_{32}$

EXERCICE 5 [4pts] Une voiture valant initialement 15000€ voit sa valeur diminuer de 20% tous les ans. On note $U_0 = 15000$ et U_n sa valeur après n années.

1. Calculer sa valeur après 1 an, après 2 ans.
   On admet alors que U_n vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 0{,}8 \times U_n$.
2. En déduire la définition directe de la suite U.
3. Calculer alors U_{10}, U_{15} et U_{20}.
4. Cette modélisation est-elle crédible ?

EXERCICE 6 [4pts]

Au 1^{er} janvier 2025, un arboriculteur possède 5 000 pommiers. Chaque année :

- il arrache 4 % des pommiers car ils sont endommagés ;
- il replante 300 nouveaux pommiers.

On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de pommiers possédés par l'arboriculteur au 1^{er} janvier de l'année $(2025 + n)$.
On obtient ainsi une suite (u_n) telle que : $u_0 = 5\,000$ et $u_{n+1} = 0{,}96u_n + 300$, pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2.

Combien de pommiers possèdera l'arboriculteur au 1^{er} janvier 2026 ?

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 7\,500$, pour tout entier naturel n.

a. Montrer que $v_{n+1} = 0{,}96v_n$ En déduire la famille a laquelle appartient la suite (v_n). On précisera la raison et le premier terme v_0.

b. Donner la définition directe de la suite (v_n).

c. En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 7\,500 - 2\,500 \times 0{,}96^n$.

3. [BONUS] La superficie des terrains de l'arboriculteur lui permet d'avoir au maximum 6 000 pommiers. L'arboriculteur voudrait savoir en quelle année il devra acquérir un autre terrain pour pouvoir planter de nouveaux pommiers.

a. Déterminer l'année.

b. Si l'évolution se poursuit toujours selon ce modèle, vers quelle valeur va tendre à terme le nombre de pommiers de cet arboriculteur ? Justifier la réponse.