Corrigé du contrôle No 2

EXERCICE 1 [3pts] Développer les expressions suivantes :

$A(x) = (x-3) \times (x+1) = x^2 + x - 3x - 3 = x^2 - 2x - 3$

$B(x) = (3x+4)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 4 + 4^2 = 9x^2 + 24x + 16$

EXERCICE 2 [3pts] Écrire les formes canoniques

$f(x) = x^2 + 3x + 1 = (x+1{,}5)^2 - 1{,}5^2 + 1 = (x+1{,}5)^2 - 2{,}25 + 1 = (x+1{,}5)^2 - 1{,}25$

$g(x) = 2x^2 + 12x - 6 = 2(x^2 + 6x - 3) = 2\Big((x+3)^2 - 9 - 3\Big) = 2\Big((x+3)^2 - 12\Big) = 2(x+3)^2 - 24$

EXERCICE 3 [3pts] Factoriser les expressions suivantes :

$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

On a :

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1 > 0$

On trouve lors deux racines :

$x_1 = \dfrac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times 3} = \dfrac{5-1}{6} = \dfrac{2}{3}$

et

$x_2 = \dfrac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times 3} = \dfrac{5+1}{6} = 1$

la factorisation est alors

$f(x) = 3(x - \frac{2}{3})(x - 1)$

$g(x) = 9x^2 - 1$

On peut utiliser la même méthode ou

voir l'identité remarquable :

$$a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b)$$

et alors

$$\begin{aligned} g(x) &= 9x^2 - 1 \\ &= (3x)^2 - 1^2 \\ &= (3x-1)(3x+1) \end{aligned}$$

EXERCICE 4 [5pts] Résoudre les équations suivantes :

$(E_1) \quad x^2 + 5x - 6 = 0$

On a : $\Delta = 25 + 24 = 49 = 7^2 > 0$ On trouve alors deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-5-7}{2 \times 1} = \dfrac{-12}{2} = -6$ et $x_2 = \dfrac{-5+7}{2 \times 1} = \dfrac{2}{2} = 1$

Les solutions sont -6 et 1

$(E_2) \quad 4x^2 + 4x + 1 = 0$

On a : $\Delta = 16 - 16 = 0$ On trouve alors une seule solution : $x_0 = \dfrac{-4}{2 \times 4} = \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2}$

La solution est $-\frac{1}{2}$

$(E_3) \quad 4x^2 + 10x = 6$

On commence par écrire : $4x^2 + 10x - 6 = 0$ puis on a : $\Delta = 100 + 96 = 196 = 14^2 > 0$ On trouve alors deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-10-14}{2 \times 4} = \dfrac{-24}{8} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-10+14}{2 \times 4} = \dfrac{1}{2}$. Les solutions sont -3 et $\frac{1}{2}$

EXERCICE 5 [3pts] Déterminer le tableau de signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ puis résoudre l'inéquation $f(x) > 0$

On a : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$

On trouve lors deux racines : $x_1 = \dfrac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \times 1} = \dfrac{4-2}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \times 1} = \dfrac{4+2}{2} = 3$

la factorisation est alors : $f(x) = 1(x-1)(x-3) = (x-1)(x-3)$

On peut alors construire le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On lit alors que les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ sont les éléments

de l'ensemble $]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$

EXERCICE 6 [3pts]

1. Montrer que $(x+2) \times (x^2 - 5x + 6) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

$(x+2) \times (x^2 - 5x + 6) = x^3 - 5x^2 + 6x + 2x^2 - 10x + 12 = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

2. En déduire les solutions de $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ équivaut donc à $(x+2) \times (x^2 - 5x + 6) = 0$

or une produit de facteurs est nuls lorsque l'un de ses facteurs est nuls

donc $(x+2) \times (x^2 - 5x + 6) = 0$ équivaut à $x = -2$ ou $x^2 - 5x + 6 = 0$

Résolvons $x^2 - 5x + 6 = 0$

On a $\Delta = 25 - 24 = 1$, donc il y a deux racines $x_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3$

Finalement les solutions de l'équation $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ sont -2, 2 et 3

3. Résoudre $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 12$

On a : $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$ puis $x \times (x^2 - 3x - 4) = 0$ donc $x = 0$ ou $x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = 9 + 16 = 25$ donc $x_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4$

Finalement on trouve trois solutions : -1, 0 et 4

La qualité de la présentation et la rédaction seront prises en compte lors de l'évaluation de la copie.

EXERCICE 1 [3pts] Écrire les formes canoniques

$f(x) = 2x^2+12x-8 = 2(x^2+6x-4) = 2\left((x+3)^2-9-4\right) = 2\left((x+3)^2-13\right) = 2(x+3)^2-26$

$g(x) = x^2+3x+1 = (x+1{,}5)^2-1{,}5^2+1 = (x+1{,}5)^2-2{,}25+1 = (x+1{,}5)^2-1{,}25$

EXERCICE 2 [3pts] Factoriser les expressions suivantes :

$f(x) = 3x^2+5x+2$

On a :

$\Delta = 5^2-4\times3\times2 = 25-24 = 1 > 0$

On trouve lors deux racines :

$x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{1}}{2\times3} = \dfrac{-5-1}{6} = -1$

et

$x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{1}}{2\times3} = \dfrac{-5+1}{6} = -\dfrac{2}{3}$

la factorisation est alors

$f(x) = 3(x+\frac{2}{3})(x+1)$

$g(x) = 9x^2-16$

On peut utiliser la même méthode ou voir l'identité remarquable :

$$a^2-b^2 = (a+b)\times(a-b)$$

et alors

$$\begin{aligned} g(x) &= 9x^2-16 \\ &= (3x)^2-4^2 \\ &= (3x-4)(3x+4) \end{aligned}$$

EXERCICE 3 [3pts] Développer les expressions suivantes :

$A(x) = (x+3)\times(x-1) = x^2-x+3x-3 = x^2+2x-3$

$B(x) = (3x-4)^2 = (3x)^2-2\times3x\times4+4^2 = 9x^2-24x+16$

EXERCICE 4 [3pts] Déterminer le tableau de signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = x^2-5x+6$ puis résoudre l'inéquation $f(x) > 0$

On a : $\Delta = (-5)^2-4\times1\times6 = 25-24 = 1 > 0$

On trouve lors deux racines : $x_1 = \dfrac{-(-5)-\sqrt{1}}{2\times1} = \dfrac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-(-5)+\sqrt{1}}{2\times1} = \dfrac{5+1}{2} = 3$

la factorisation est alors : $f(x) = 1(x-2)(x-3) = (x-2)(x-3)$

On peut alors construire le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On lit alors que les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ sont les éléments

de l'ensemble $]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[$

EXERCICE 5 [5pts] Résoudre les équations suivantes :

(E_1) $x^2 + 3x - 10 = 0$

On a : $\Delta = 9 + 40 = 49 = 7^2 > 0$ On trouve alors deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-3-7}{2\times 1} = \dfrac{-10}{2} = -5$ et $x_2 = \dfrac{-3+7}{2\times 1} = \dfrac{4}{2} = 2$ Les solutions sont -5 et 2

(E_2) $x^2 - 4x + 4 = 0$

On a : $\Delta = 16 - 16 = 0$ On trouve alors une seule solution : $x_0 = \dfrac{4}{2\times 1} = \dfrac{4}{2} = 2$

(E_3) $4x^2 - 6 = 10x$

On commence par écrire : $4x^2 - 10x - 6 = 0$ puis on a : $\Delta = 100 + 96 = 196 = 14^2 > 0$ On trouve alors deux solutions :

$x_1 = \dfrac{10-14}{2\times 4} = \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{10+14}{2\times 4} = 3.$ Les solutions sont $-\frac{1}{2}$ et 3

EXERCICE 6 [3pts]

1. Montrer que $(x-2)\times(x^2+5x+6) = x^3+3x^2-4x-12$

   $(x-2)\times(x^2+5x+6) = x^3+5x^2+6x-2x^2-10x-12 = x^3+3x^2-4x-12$

2. En déduire les solutions de $x^3+3x^2-4x-12 = 0$

   $x^3+3x^2-4x-12=0$ équivaut donc à $(x-2)\times(x^2+5x+6)=0$

   or une produit de facteurs est nuls lorsque l'un de ses facteurs est nuls

   donc $(x-2)\times(x^2+5x+6)=0$ équivaut à $x-2=0$ ou $x^2+5x+6=0$

   Résolvons $x^2+5x+6=0$

   On a $\Delta = 25-24 = 1$, donc il y a deux racines $x_1 = \dfrac{-5-1}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-5+1}{2} = -2$

   Finalement les solutions de l'équation $x^3+3x^2-4x-12=0$ sont $-3, \quad -2$ et $x = 2$

3. Résoudre $x^3+3x^2-4x-12 = -12$

   On a : $x^3+3x^2-4x=0$ puis $x\times(x^2+3x-4)=0$ donc $x=0$ ou $x^2+3x-4=0$

   $\Delta = 9+16 = 25$ donc $x_1 = \dfrac{-3-5}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-3+5}{2} = 1$

   Finalement on trouve trois solutions : -4, 0 et 1