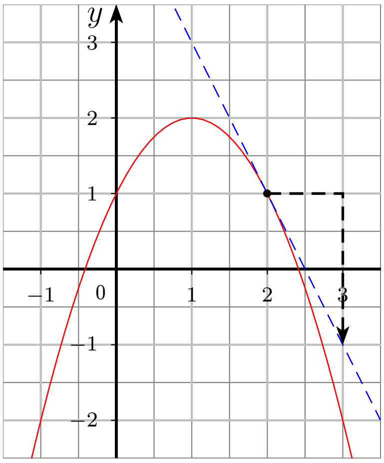
Corrigé du contrôle No 4

EXERCICE 1 On considère la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère du plan.

1. Allure, tangente en 2 et nombre dérivé en 2.



On lit environ $f'(2) \approx -2$.

2. Dérivabilité en 2

$f(2+h) = -(2+h)^2+2(2+h)+1 = -(4+4h+h^2)+4+2h+1 = -h^2-4h-4+4+2h+1 = -h^2-2h+1$

or $f(2) = 1$ donc $f(2+h)-f(2) = -h^2-2h$ donc $t_x = \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = -h+-2$ donc $\lim\limits_{h\to 0} t_x = -2$

Puisque ce nombre est un réel, f est dérivable en 2 et le nombre dérivé est 2 est $f'(2) = -2$

3. Équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

L'équation a pour forme $y = f(2)(x-2) + f(2)$ donc $y = -2(x-2) + 1$ donc $y = -2x + 5$

EXERCICE 2 On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 3x^2 + 2x - 5$

1. Résoudre $P(x) = -5$

$P(x) = -5$ équivaut à $3x^2 + 2x = 0$ puis à $x(3x+2) = 0$

donc $P(x) = -5$ a pour unique solutions $x = 0$ et $x = -\dfrac{2}{3}$

2. Écrire la forme canonique de P

$P(x) = 3\left(x^2 + \dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{3}\right)$

$$P(x) = 3\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}x - \frac{5}{3}\right)$$

$$P(x) = 3\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}x - \frac{15}{9}\right)$$

$$P(x) = 3\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right)$$

$$P(x) = 3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{3}$$

3. Factorisation de P.

$P(x) = 3\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{16}{9}\right)$

donc $P(x) = 3\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2\right)$

donc $P(x) = 3\left(x+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right)$

donc $P(x) = 3(x-1)\left(x+\frac{5}{3}\right)$

4. Équation $P(x) = 0$.

$P(x) = 3(x-1)\left(x+\frac{5}{3}\right)$ donc $P(x) = 0$ ssi $x = 1$ ou $x = -\frac{5}{3}$

5. Tableau de signe de $P(x)$.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
3		$+$		$+$		$+$	
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+\frac{5}{3})$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

6. En déduire les solutions de $P(x) < 0$

On lit dans le tableau $P(x) < 0$ ssi $x \in \left]-\frac{5}{3};1\right[$

7. Résoudre $3x^4 + 2x^2 - 5 = 0$ On pose : $u = x^2$, l'équation dévient : $3u^2 + 2x - 5 = 0$

Elle est à présent du second degré, on retrouve l'équation du 1 donc $u = 1$ ou $u = -\frac{5}{3}$

donc $x^2 = 1$ ou $x^2 = -\frac{5}{3}$ ce qui est impossible

donc $x = 1$ ou $x = -1$

8. Résoudre $3x - \frac{5}{x} = -2$

$x = 0$ n'est pas solution or en multipliant l'équation par x cela donne $3x^2-5 = 2x$ donc $x^2-2x-5 = 0$

On retrouve l'équation du 1) donc $x = 1$ ou $x = -\frac{5}{3}$

Corrigé du contrôle No 4

EXERCICE 3

1. Valeurs prises par X en tenant compte du prix du billet.

   X prend les valeurs 498 ou 148 ou 98 ou -2

2. Loi de probabilité de X.

$X=k$	498	148	98	-2	*total*
$P(X=k)$	$\dfrac{1}{2000}$	$\dfrac{2}{2000}$	$\dfrac{5}{2000}$	$\dfrac{1992}{2000}$	1

3. Espérance mathématique de X et conclusion.

   $E(X)=\dfrac{498}{2000}+\dfrac{296}{2000}+\dfrac{490}{2000}-\dfrac{3984}{2000}=\dfrac{-2700}{2000}=-1{,}35$

   Ce qui signifie que si on joue un très grand nombre de fois à ce jeu, en moyenne on va perdre 1,35 euros par partie. Comme l'espérance est négative, ce jeu est favorable à l'organisateur.

4. Limiter le nombre de billets à un nombre x

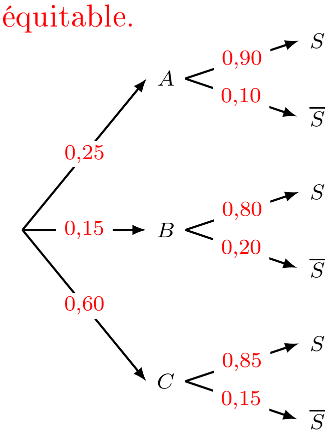
   Pour que le jeu devienne équitable, on calcule x pour que $E(X)=0$

   or $E(x)=\dfrac{498+296+490}{2000}+\dfrac{-2(x-8)}{x}$) cela donne $\dfrac{1284}{x}+\dfrac{-2x+16}{x}=0$ donc $1284=2x-16$ donc $2x=1300$ donc $x=650$

   Il faut limiter à 650 le nombre de billets vendus pour que je jeu soit équitable.

EXERCICE 4

1. Arbre pondéré ci-contre modélisant la situation de l'énoncé.



2. Probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B.

   $p(B\cap S)=0{,}15\times 0{,}80=0{,}12$ soit 12%

3. Probabilité $P\left(C\cap\overline{S}\right)$ et interprétation.

   $p\left(C\cap\overline{S}\right)=0{,}6\times 0{,}15=0{,}09$. Il y a 9% de chance que la connexion passe par C et soit instable.

4. Démontrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S)=0{,}855$.

   D'après la formule des probabilités totales :

   $$p(S)=p(A\cap S)+p(B\cap S)+p(C\cap S)=0{,}25\times 0{,}9+0{,}12+0{,}6\times 0{,}85=0{,}855.$$

5. On suppose désormais que la connexion est stable. Calcul de $p_S(B)$

   $p_S(B)=\dfrac{p(B\cap S)}{p(S)}=\dfrac{0{,}12}{0{,}855}\approx 0{,}14$ soit environ 14%