Contrôle No 4

EXERCICE 1 On considère la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère du plan.

1. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi que sa tangente au point d'abscisse $a = 2$. Donner, par lecture graphique, la valeur de $f'(2)$.
2. Montrer par le calcul, en utilisant le taux d'accroissement de f, que f est dérivable en 2 et préciser la valeur exacte de $f'(2)$.
3. Déterminer alors une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

EXERCICE 2 On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 3x^2 + 2x - 5$

1. Résoudre $P(x) = -5$
2. Écrire la forme canonique de P
3. Factoriser P à l'aide de la forme canonique.
4. Résoudre $P(x) = 0$
5. Établir le tableau de signe de $P(x)$
6. En déduire les solutions de $P(x) < 0$
7. Résoudre $3x^4 + 2x^2 - 5 = 0$
8. Résoudre $3x - \dfrac{5}{x} = -2$

EXERCICE 3
Une loterie organisée par une association sportive est constituée d'un ensemble de billets numérotés de 1 à 2000. Un des billets rapporte un lot de 500 €, deux billets un lot de 150 € et cinq billets un lot de 100 €. Le prix du billet est de 2 €.
On achète un billet au hasard. X est la variable aléatoire, définie sur Ω, égale au gain algébrique procuré par le billet.

1. Déterminer les valeurs prises par X en tenant compte du prix du billet.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance mathématique de X. Qu'en concluez-vous ?
4. L'association décide de limiter le nombre de billets à un nombre x, sachant que $1 \leq x \leq 2000$, pour que le jeu devienne équitable. Calculer x.

EXERCICE 4 Pour accéder au réseau privé d'une entreprise depuis l'extérieur, les connexions des employés transitent aléatoirement via trois serveurs distants différents, notés A, B et C. Ces serveurs ont des caractéristiques techniques différentes et les connexions se répartissent de la manière suivante :

- 25 % des connexions transitent via le serveur A ;
- 15 % des connexions transitent via le serveur B ;
- le reste des connexions s'effectue via le serveur C.

Les connexions à distance sont parfois instables et, lors du fonctionnement normal des serveurs, les utilisateurs peuvent subir des déconnexions pour différentes raisons (saturation des serveurs, débit internet insuffisant, attaques malveillantes, mises à jour de logiciels, etc.).

On dira qu'une connexion est stable si l'utilisateur ne subit pas de déconnexion après son identification aux serveurs. L'équipe de maintenance informatique a observé statistiquement que, dans le cadre d'un fonctionnement habituel des serveurs :

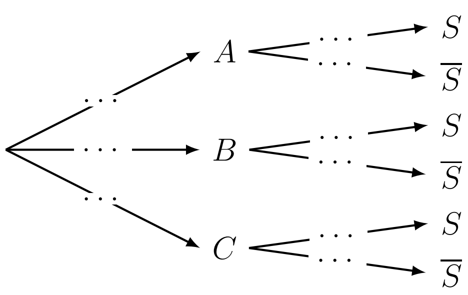
- 90 % des connexions via le serveur A sont stables ;
- 80 % des connexions via le serveur B sont stables ;
- 85 % des connexions via le serveur C sont stables.

On s'intéresse au hasard à l'état d'une connexion effectuée par un employé de l'entreprise. On considère les évènements suivants :

- A : « La connexion s'est effectuée via le serveur A » ;
- B : « La connexion s'est effectuée via le serveur B » ;
- C : « La connexion s'est effectuée via le serveur C » ;
- S : « La connexion est stable ».

On note $\overline{S}$ l'évènement contraire de l'évènement S.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation de l'énoncé.



2. Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à 0,12.
3. Calculer la probabilité $P\left(C \cap \overline{S}\right)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Démontrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0{,}855$.
5. On suppose désormais que la connexion est stable.

   Calculer la probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B.