

EXERCICE 1

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = -2x + 2$ puis $f'(2) = -2 \times 2 + 2 = -2$
2. Une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2 est $y = f'(2) \times (x - 2) + f(2)$
or $f(2) = -4 + 4 + 1 = 1$ donc $y = -2 \times (x - 2) + 1$ C'est à dire $y = -2x + 5$.
On a obtenu : $y = -2x + 5$

EXERCICE 2

On considère le polynôme P défini sur \mathbb{R} par $P(x) = x^2 + 6x + 5$

1. On a $P(-2) = 4 - 12 + 5 = -3$
2. La forme canonique de P est $P(x) = (x + 3)^2 - 3^2 + 5 = (x + 3)^2 - 9 + 5 = (x + 3)^2 - 4$
3. Une factorisation de $P(x)$ à l'aide de la forme canonique est :

$$P(x) = (x - 3)^2 - 2^2 = ((x + 3) - 2)((x + 3) + 2) = (x + 1)(x + 5)$$

4. $P(x) = 0$ ssi $(x + 1)(x + 5) = 0$ donc $x = -1$ ou $x = -5$

Autre méthode : $\Delta = 36 - 20 = 16 > 0$ on a $\sqrt{\Delta} = 4$ donc $x_1 = \frac{-6 - 4}{2} = -5$ et $x_2 = \frac{-6 + 4}{2} = -1$

5. Le tableau de signe de $P(x)$

Puisque : $P(x) = (x + 1)(x + 5)$

x	$-\infty$	-5	-1	$+\infty$
$x + 5$	$-$	0	$+$	$+$
$x + 1$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$+$	0	$-$	$+$

6. D'après le tableau ci-dessus, les solutions de $P(x) < 0$ sont les x appartenant à l'intervalle $] - 5, - 1[$

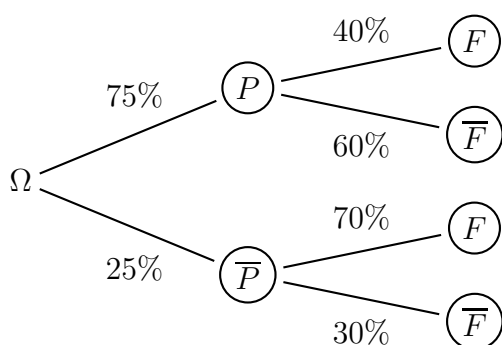
EXERCICE 3

La bibliothèque d'un lycée comporte 150 romans policiers et 50 romans de science-fiction.
On sait que 40% des romans policiers sont français et que 70% des romans de science-fiction sont français.
Séraphin choisit au hasard un ouvrage parmi les 200 livres de la bibliothèque.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre (ou d'un tableau) de probabilités.

P policier, \overline{P} science fiction, F français, \overline{F} étranger

On a : $\frac{150}{200} = 75\%$ de romans policiers



2. La probabilité qu'il choisisse un roman policier est de 75%
3. La probabilité qu'il choisisse un roman policier français est de $0,75 \times 0,40 = 0,3$ soit 30%
4. La probabilité qu'il choisisse un ouvrage d'un auteur français est de $0,30 + 0,25 \times 0,70 = 0,475$.
5. La probabilité qu'il choisisse un roman policier sachant que l'auteur est français est calculée par $p_F(P) = \frac{p(P \cap F)}{p(F)} = \frac{0,30}{0,475} \approx 0,63$ soit environ 63%

EXERCICE 4 On considère la suite définie par $U_0 = 20$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $U_{n+1} = 3 + \frac{1}{4} \times U_n$

1. On calcule $U_1 = 3 + \frac{1}{4} \times 20 = \boxed{8}$ puis $U_2 = 3 + \frac{1}{4} \times U_1 = \boxed{5}$.
2. Comme $\frac{U_1}{U_0} = 0,4$ et $\frac{U_2}{U_1} = 0,625 \neq 0,4$ la suite n'est pas géométrique.

3. On définit alors la suite (V_n) par $V_n = U_n - 4$

(a) On calcule $V_0 = U_0 - 4 = \boxed{16}$ et $V_1 = U_1 - 4 = \boxed{4}$

(b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = U_{n+1} - 4$

$$= 3 + \frac{1}{4}U_n - 4$$

$$= \frac{1}{4}(V_n + 4) - 1$$

$$= \frac{1}{4}V_n + 1 - 1$$

$$= \frac{1}{4}V_n \text{ donc } (V_n) \text{ est géométrique de raison } q = \frac{1}{4}$$

(c) D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$V_n = V_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = 16 \times \frac{1}{4^n} = \frac{16}{4^n} = \frac{4^2}{4^n} = \frac{1}{4^{n-2}}$$

$$\text{puis, comme } U_n = V_n + 4, \text{ cela donne } U_n = 4 + \frac{1}{4^{n-2}}$$