Exercices

Exercice 1 : Soit la fonction $f(x) = x^2 + 3x + 1$. Calculer $f'(x)$ à l'aide de la définition du nombre dérivé.

Exercice 2 : Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$. Calculer la dérivée de $f(x)$ en $x = 2$ à l'aide de la définition du nombre dérivé.

Exercice 3 : Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. Calculer $f'(x)$ en $x = 4$ en utilisant la définition du nombre dérivé.

Exercice 4 : Soit la fonction $f(x) = x^3 - 2x + 5$. Calculer $f'(x)$ à l'aide de la définition du nombre dérivé.

Corrigé détaillé

Exercice 1 : La définition du nombre dérivé donne :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Pour $f(x) = x^2 + 3x + 1$, nous avons :

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 3(x+h) + 1 = x^2 + 2xh + h^2 + 3x + 3h + 1$$

Ainsi,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2 + 3x + 3h + 1) - (x^2 + 3x + 1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 + 3h}{h}$$

En factorisant par h, on obtient :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} (2x + h + 3) = 2x + 3$$

Exercice 2 : Pour $f(x) = \frac{1}{x}$, nous avons :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x - (x+h)}{h(x+h)x} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x+h)x}$$

En simplifiant par h, nous obtenons :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = \frac{-1}{x^2}$$

En particulier, en $x = 2$, $f'(2) = \frac{-1}{2^2} = -\frac{1}{4}$.

Exercice 3 : Pour $f(x) = \sqrt{x}$, la définition du nombre dérivé donne :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

En multipliant par $\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$, nous obtenons :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

En simplifiant par h, nous avons :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

En $x = 4$, $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

Exercice 4 : Pour $f(x) = x^3 - 2x + 5$, nous avons :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - 2(x+h) + 5 - (x^3 - 2x + 5)}{h}$$

Développons $(x+h)^3$:

$$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

Ainsi :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2h}{h}$$

En factorisant par h, nous obtenons :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}(3x^2 + 3xh + h^2 - 2) = 3x^2 - 2$$