

08/04/2026

Baccalauréat Blanc : Mathématiques

**Durée de l'épreuve : 4h****Coefficient : 16**L'usage de tout modèle de calculatrice est autorisé.Une seule calculatrice sur le bureau de chaque élève. Pas d'échange de calculatrice entre élèves.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

**Exercice 1****4 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est juste ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

**Affirmation 1 :** Soit (E) l'équation différentielle :  $y' - 2y = -6x + 1$ .La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{2x} - 6x + 1$  est une solution de l'équation différentielle (E).**Affirmation 2 :** On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par

$$u_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

La suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$ .**Affirmation 3 :** On considère la suite  $(u_n)$  définie dans l'affirmation 2.L'instruction suite(50) ci-dessous, écrite en langage Python, renvoie  $u_{50}$ .

```

1 def suite(k):
2     S=0
3     for i in range(k):
4         S=S+(3/4)**k
5     return S

```

**Affirmation 4 :** Soit  $a$  un réel et  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = a \ln(x) - 2x.$$

Soit  $C$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .Il existe une valeur de  $a$  pour laquelle la tangente à  $C$  au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

**Exercice 2****6 points**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = x^2 - x \ln(x).$$

On admet que  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  et  $f''$  la fonction dérivée de la fonction  $f'$ .

**Partie A :** Étude de la fonction  $f$

1. Déterminer les limites de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. Pour tout réel  $x$  strictement positif, calculer  $f'(x)$ .
3. Montrer que pour tout réel  $x$  strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction  $f'$  sur  $]0; +\infty[$ , puis dresser le tableau des variations de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .  
On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction  $f'$  sur  $]0; +\infty[$ .  
Les limites de la fonction  $f'$  aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
5. Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

**Partie B :** Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation  $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction  $g$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ , on note  $g'$  sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer  $g'(x)$ , puis dresser le tableau des variations de la fonction  $g$ .  
Les limites de la fonction  $g$  aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation  $g(x) = 1$ .  
Résoudre, sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = x$ .

**Partie C :** Étude d'une suite récurrente

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

2. Justifier que la suite  $(u_n)$  converge.
3. On appelle  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)$  et on admet que  $\ell$  vérifie l'égalité  $f(\ell) = \ell$ .  
Déterminer la valeur de  $\ell$ .

**Exercice 3****5 points**

Toutes les probabilités, sauf indication contraire, seront arrondies à  $10^{-3}$  dans cet exercice.

« Le virus du chikungunya, transmis à l'homme par la piqûre du moustique tigre provoque chez les patients des douleurs articulaires aiguës qui peuvent être persistantes. En 2005, une importante épidémie de chikungunya a touché les îles de l'Océan Indien et notamment l'île de La Réunion, avec plusieurs centaines de milliers de cas déclarés. En 2007, la maladie a fait son apparition en Europe, puis fin 2013, aux Antilles et a atteint le continent américain en 2014 ».

(<https://www.pasteur.fr/fr/centre-medical/fiches-maladies/chikungunya>)

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus.

Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'un individu atteint par le virus ait un test positif est de 0,999;
- la probabilité qu'un individu non atteint par le virus ait un test positif est de 0,005.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population cible.

Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

- $M$  l'événement : « l'individu choisi est atteint du chikungunya ».
- $T$  l'événement : « le test de l'individu choisi est positif ».

On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus est supérieure à 0,95.

**Partie A : Étude d'un exemple**

1. Donner les probabilités  $P_M(T)$  et  $P_{\overline{M}}(T)$ .

« En mars 2005, l'épidémie s'est propagée rapidement dans l'île de La Réunion, avec une flambée importante entre fin avril et début juin puis une persistance de la transmission virale durant l'hiver austral. Au total, 270 000 personnes ont été infectées pour une population totale de 750 000 individus ».

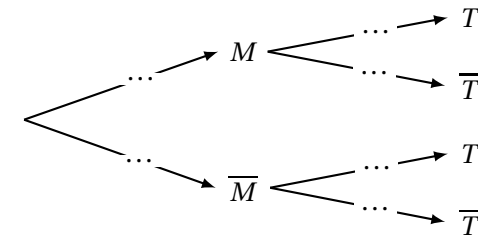
(<https://www.pasteur.fr/fr/centre-medical/fiches-maladies/chikungunya>)

Fin 2005, le laboratoire a effectué un test de dépistage massif de la population de l'île de La Réunion.

Dans cette partie, la population cible est donc la population de l'île de La Réunion.

1. Donner la valeur exacte de  $P(M)$ .

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré donné ci-dessous.



3. Calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par le virus et ait un test positif.
4. Calculer la probabilité qu'un individu ait un test positif.
5. Calculer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus.
6. Peut-on estimer que ce test est fiable? Argumenter.

**Partie B : Dépistage sur une population cible**

Dans cette partie, on note  $p$  la proportion de personnes atteintes par le virus dans une population cible.

On cherche ici à tester la fiabilité du test de ce laboratoire en fonction de  $p$ .

1. Recopier, en l'adaptant, l'arbre pondéré de la question A3 en tenant compte des nouvelles données.
2. Exprimer la probabilité  $P(T)$  en fonction de  $p$ .
3. Montrer que  $P_T(M) = \frac{999p}{994p + 5}$ .
4. Pour quelles valeurs de  $p$  peut-on considérer que ce test est fiable?

**Partie C : Étude sur un échantillon**

Pendant l'épidémie, on admet que la probabilité d'être atteint du chikungunya sur l'île de La Réunion est de 0,36.

On considère un échantillon de  $n$  individus choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par  $X$  la variable aléatoire dénombrant le nombre d'individus infectés dans cet échantillon parmi les  $n$  tirés au sort.

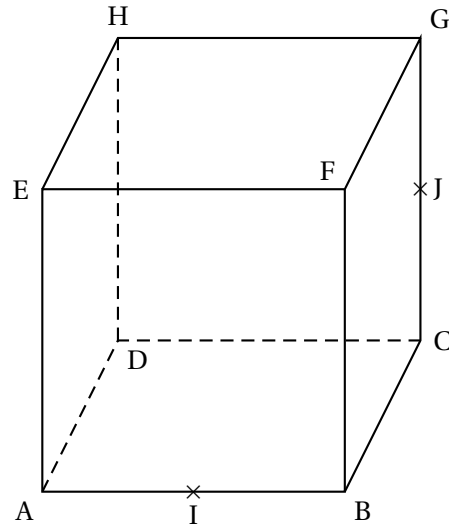
On admet que  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p = 0,36$ .

Déterminer à partir de combien d'individus  $n$  la probabilité de l'événement « au moins un des  $n$  habitants de cet échantillon est atteint par le virus » est supérieure à 0,99. Expliquer la démarche.

**Exercice 4****5 points**

Le cube ABCDEFGH a pour arête 1 cm.

Le point I est le milieu du segment [AB] et le point J est le milieu du segment [CG].



On se place dans le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. Montrer que le vecteur  $\overrightarrow{EJ}$  est normal au plan (FHI).
3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (FHI) est  $-2x - 2y + z + 1 = 0$ .
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EJ).
5.
  - a. On note K le projeté orthogonal du point E sur le plan (FHI). Calculer ses coordonnées.
  - b. Montrer que le volume de la pyramide EFHI est  $\frac{1}{6} \text{ cm}^3$ .  
On pourra utiliser le point L, milieu du segment [EF]. On admet que ce point est le projeté orthogonal du point I sur le plan (EFH).
  - c. Dédurre des deux questions précédentes l'aire du triangle FHI.