08/04/2026	BBMathématiques : correction

Exercice 1 — 4 points

Affirmation 1 : Fausse. En effet :
Dérivons la fonction f (qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que somme d'une fonction polynôme, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et d'une fonction composée d'une fonction linéaire suivie de la fonction exponentielle, toutes deux définies et dérivables sur $\mathbb{R}$).
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 6.$
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) - 2f(x) = \left(2\mathrm{e}^{2x} - 6\right) - 2\left(\mathrm{e}^{2x} - 6x + 1\right)$

$$= 2\mathrm{e}^{2x} - 6 - 2\mathrm{e}^{2x} + 12x - 2 \quad \text{en distribuant le } -2$$
$$= 12x - 8$$

Ainsi, on a $f' - 2f$ qui est la fonction $x \longmapsto 12x - 8$, qui est différente de la fonction $x \longmapsto -6x + 1$, donc f n'est pas une solution de l'équation différentielle (E).

Affirmation 2 : Fausse En effet :
En posant la suite (v_n), suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $q = \frac{3}{4}$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$
Et donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$
En utilisant la formule connue pour déterminer la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} = 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right).$$

Comme on a : $0 < \frac{3}{4} < 1$, on en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0.$

Puis, par limite de la somme, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 1.$

Et, enfin, par limite du produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) = 4.$
La limite de la suite est donc finie (et vaut 4).

Affirmation 3 : Fausse. En effet :
La fonction `suite()` part d'une variable `S` qui prend une valeur égale à 0, puis effectue une boucle `for`, qui va ajouter à ce 0 des puissances de $\frac{3}{4}$ (l'instruction `a**b` signifie a^b).
Il y a ici deux problèmes dans cette fonction pour que `suite(50)` renvoie la valeur u_{50}.

- La première erreur, est qu'au lieu d'ajouter des puissances successives de $\frac{3}{4}$, on ajoute toujours la même puissance de $\frac{3}{4}$. L'appel `suite(50)` ajoute $\left(\frac{3}{4}\right)^{50}$ à chaque exécution de la boucle `for`, au lieu d'ajouter $\left(\frac{3}{4}\right)^{0}$, puis $\left(\frac{3}{4}\right)^{1}$, puis $\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$ et ainsi de suite jusqu'à $\left(\frac{3}{4}\right)^{50}$.
- La seconde erreur est que le nombre u_{50} est la somme des 51 premières puissances de $\frac{3}{4}$ (de la puissance 0 à la puissance 50), et la boucle `for` ici s'exécutera 50 fois seulement, et pas 51 fois.

Pour que l'appel `suite(50)` renvoie u_{50}, il faudrait une fonction comme celle-ci :

```
1 def suite(k):
2   S=0
3   for i in range(k+1):
4     S=S+(3/4)**i
5   return S
```

La ligne 3 modifiée permet d'exécuter la boucle `for` 51 fois (la variable `i` commencera à la valeur 0, puis augmentera d'unité en unité jusqu'à atteindre la valeur strictement inférieure à `k+1`, donc d'atteindre la valeur `k`).
La ligne 4 modifiée fait qu'à chaque exécution de la boucle for, on va ajouter une puissance différente de la raison, avec un exposant de plus en plus élevé.
Remarques : l'instruction `range(k+1)` a exactement le même effet que `range(0,k+1)`.
On peut aussi trouver d'autres fonctions, avec un code différent qui auront le même effet. Il n'est pas nécessaire pour répondre à la question de donner une fonction correcte : pointer l'une des deux erreurs commises suffit à montrer que l'appel `suite(50)` ne produit pas l'effet escompté.

Affirmation 4 : Vraie. En effet :
Quel que soit le réel a, la fonction f est définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, en tant que somme d'une fonction linéaire et du produit de la fonction ln par un réel, toutes fonctions définies et dérivables sur l'intervalle considéré.
Soit a un réel :
On a : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad f'(x) = a \times \dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{a}{x} - 2.$
Notamment, pour $x = 1 \quad f'(1) = \dfrac{a}{1} - 2 = a - 2.$
La tangente à C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si $f'(1) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a = 2$.
Il existe donc une (unique) valeur de a telle que la tangente à C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 2 — 6 points

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.
Partie A :

1. • Limite en 0 :
   $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et, d'après la propriété des croissances comparées :
   $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$
   Par limite de la somme, on a donc : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 - x\ln(x) = 0$
   • Limite en $+\infty$:
   $f(x) = x^2 - x\ln(x) = x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$
   Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc,
   par limite de la somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = 1$
   De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc, par limite du produit,
   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$
2. Pour tout réel x strictement positif, on a :
   $f'(x) = 2x - 1 \times \ln(x) - x \times \dfrac{1}{x} = 2x - 1 - \ln(x).$
3. Pour tout réel x strictement positif, on a :
   $f''(x) = 2 - 0 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-1}{x}.$
4. Déterminons le signe de $2x - 1$:
   $2x - 1 > 0 \iff 2x > 1$
   $ \iff x > \dfrac{1}{2}$
   L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)
   $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \times \dfrac{1}{2} - 1 - \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - 1 + \ln(2) = \ln(2)$
   On a donc :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $2x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$		$+$	
signe de $f''(x)$	||	$-$	0	$+$	
variations de f'	||	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	

5. Le minimum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$ est donc $\ln(2)$ qui est strictement positif, donc, sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$ et donc, la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B :

1. Pour tout réel x strictement positif, on a : $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}.$
   Déterminons le signe de $x - 1$:

$x-1>0 \iff x>1$

L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)

$g(1)=1-\ln(1)=1-0=1$

On a donc :

x	0		1		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$		$+$	
signe de $g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
variations de g	||	$\searrow$	1	$\nearrow$	

2. $f(x)=x \iff x=x^2-x\ln(x)$

$$\begin{aligned}
&\iff 0=x^2-x-x\ln(x)\\
&\iff 0=x(x-1-\ln(x))\\
&\iff 0=x-1-\ln(x) \quad \text{car } x>0 \quad \text{donc } x\neq 0\\
&\iff 1=x-\ln(x)\\
&\iff 1=g(x)\\
&\iff x=1
\end{aligned}$$

L'équation $f(x)=x$ admet une unique solution sur $]0\ ;\ +\infty[$, cette solution est $x=1$.

Partie C :

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

Initialisation : Calculons u_1 :

$u_1=f(u_0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{\ln(2)}{2}\approx 0,597.$

On constate que l'inégalité est vraie pour $n=0$, on a bien : $\frac{1}{2}\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 1.$

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, tel que $\frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1.$

Montrons que l'inégalité est vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1 &\implies f\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(1)\\
&\qquad \text{car } f \text{ est strictement croissante sur }]0\ ;\ +\infty[\\
&\implies f\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 1\\
&\qquad \text{car } f \text{ est la fonction de récurrence de la suite } (u_n)\\
&\implies \frac{1}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 1\\
&\qquad \text{car } f\left(\frac{1}{2}\right)\approx 0,60>\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ceci montre que les inégalités sont vraies au rang $n+1$.

Conclusion : Les inégalités sont vraies au rang 0, et si elle sont vraies au rang n naturel, elles sont vraies au rang suivant $n+1$, donc, en vertu du principe de récurrence, on a :

$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1.$

2. On a notamment :

— $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\leqslant u_{n+1}.$ La suite (u_n) est donc croissante.

— $\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{1}{2}\leqslant u_n\leqslant 1.$ La suite (u_n) est donc bornée par $\frac{1}{2}$ et 1.

La suite étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est convergente, vers une limite ℓ vérifiant $\frac{1}{2}\leqslant \ell\leqslant 1$

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1}=f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $]0\ ;\ +\infty[$, intervalle qui contient la limite ℓ de la suite.

D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x)=x$ dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

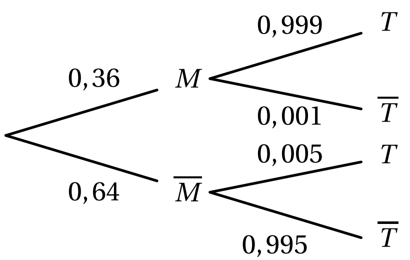
D'après la question **2.** de la **Partie B**, cette équation n'a qu'une solution dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$: 1.

La suite (u_n) converge donc vers $\ell=1$.

Exercice 3 — 5 points

Partie A : Étude d'un exemple

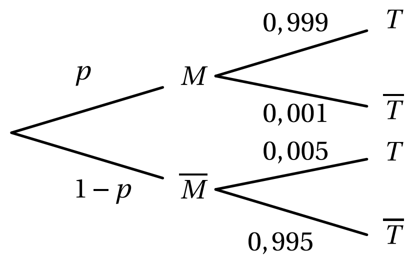
1. D'après l'énoncé : $P_M(T) = 0,999$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0,005$
2. $270\,000$ personnes ont été infectées sur $750\,000$ donc $P(M) = \dfrac{270\,000}{750\,000} = 0,36$
3. Voici l'arbre pondéré complété :



4. $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,36 \times 0,999 = 0,359\,64$
   donc la probabilité que l'individu soit atteint et que le test soit positif est $0,36$ à 10^{-3} près.
5. M et $\overline{M}$ constituent une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :
   $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,36 \times 0,999 + 0,64 \times 0,005$
   $= 0,359\,64 + 0,0032 = 0,362\,84$
   donc la probabilité que l'individu ait un test positif est $0,363$ à 10^{-3} près.
6. $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,359\,64}{0,362\,84} \approx 0,991$
7. Puisque $P_T(M) \approx 0,991 > 0,95$, le test est considéré comme fiable.

Partie B : Dépistage sur une population cible

1. Voici l'arbre pondéré complété :



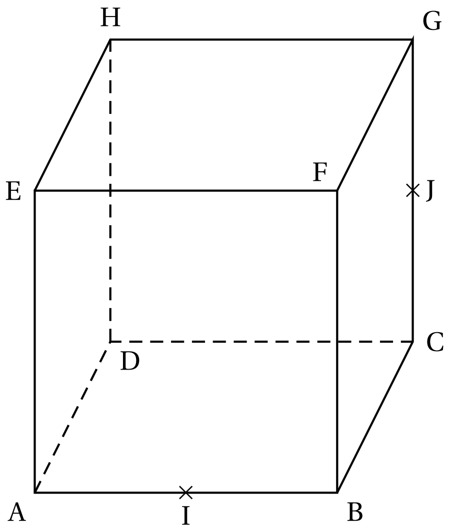
2. M et $\overline{M}$ constituent une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :
   $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = p \times 0,999 + (1-p) \times 0,005$
   $P(T) = 0,999p + 0,005 - 0,005p = 0,994p + 0,005$
3. $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{p \times 0,999}{0,994p + 0,005}$
4. Le test est fiable si $P_T(M) > 0,95$:
   $\dfrac{0,999p}{0,994p + 0,005} > 0,95 \iff 0,999p > 0,95(0,994p + 0,005)$
   $\iff 0,999p > 0,9443p + 0,00475 \iff 0,0547p > 0,00475$
   $\iff p > \dfrac{0,00475}{0,0547} \approx 0,087$
   donc, le test est fiable si $p > 0,087$ (soit 8,7%).

Partie C : Étude sur un échantillon

X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,36$.
On cherche le plus petit n tel que $P(X \geqslant 1) > 0,99$
$P(X \geqslant 1) > 0,99 \iff 1 - P(X = 0) > 0,99 \iff -P(X = 0) > -0,01$
$\iff P(X = 0) < 0,01$
or $P(X = 0) = (1 - 0,36)^n = 0,64^n$ donc $P(X \geqslant 1) > 0,99 \iff 0,64^n < 0,01$
$\iff \ln(0,64^n) \leqslant \ln(0,01)$ car la fonction ln est croissante sur $]\,0\,,\,+\infty[$
$\iff n\ln(0,64) \leqslant \ln(0,01) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,64)}$ car $\ln(0,64) < 0$ or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,64)} \approx 10,32$,
donc il faut interroger au moins 11 individus pour que la probabilité qu'au moins l'un d'eux soit atteint dépasse 99 %.

Exercice 4 — 5 points

Le cube ABCDEFGH a pour arête 1 cm.
Le point I est le milieu du segment [AB] et le point J est le milieu du segment [CG].



On se place dans le repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. On a : $I\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 0\right)$ et $J\left(1 ; 1 ; \frac{1}{2}\right)$.
2. On en déduit :
$\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\\frac{1}{2}-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; et $\overrightarrow{FI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-1\\0-0\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$.
donc :
$\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FH} = 1\times(-1)+1\times 1-\frac{1}{2}\times 0 = 0$
$\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FI} = -\frac{1}{2}\times 1+1\times 0-\frac{1}{2}\times(-1) = 0$
Le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FHI) donc $\overrightarrow{EJ}$ est normal au plan (FHI).
3. Le vecteur $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}1\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (FHI) donc le vecteur $\vec{n} = -2\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur normal au plan (FHI).
Une équation cartésienne du plan (FHI) est donc de la forme : $-2x-2y+z+d=0$ avec $d \in \mathbb{R}$.
De plus, le point F appartient au plan (FHI) donc ses coordonnées verifient l'équation du plan. On a donc :
$$\begin{aligned} F \in (FHI) &\iff -2\times x_F-2\times y_F+z_F+d=0\\ &\iff -2\times 1-2\times 0+1+d=0\\ &\iff -2+1+d=0\\ &\iff d=1\end{aligned}$$
Une équation cartésienne du plan (FHI) est donc $-2x-2y+z+1=0$.
4. Le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est un vecteur directeur de la droite (EJ) et E est un point de la droite (EJ). Une représentation paramétrique de la droite (EJ) est donc :
$$\left\{\begin{array}{l} x=0+1\times t\\ y=0+1\times t\\ z=1-\frac{1}{2}\times t\end{array}\right. \text{ avec } t\in\mathbb{R} \quad \text{c'est à dire : } \left\{\begin{array}{l} x=t\\ y=t\\ z=1-\frac{1}{2}t\end{array}\right. \text{ avec } t\in\mathbb{R}$$
5. **a.** Soit K est le projeté orthogonal du point E sur le plan (FHI).
K est donc l'intersection du plan (FHI) et de la droite orthogonale au plan (FHI) passant par E, c'est à dire la droite (EJ).
Pour cela, on va considérer le point M_t de paramètre t sur la droite (EJ).
$$\begin{aligned} M_t \in (FHI) &\iff -2x_{M_t}-2y_{M_t}+z_{M_t}+1=0\\ &\iff -2\times t-2\times t+\left(1-\frac{1}{2}t\right)+1=0\\ &\iff -2t-2t+1-\frac{1}{2}t+1=0\\ &\iff -\frac{9}{2}t=-2\\ &\iff t=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

Le seul point de la droite étant aussi sur le plan est donc K, c'est le point de paramètre $\dfrac{4}{9}$ dans l'équation paramétrique de (EJ).

Ses coordonnées vérifient :

$x_K = \dfrac{4}{9}$, $\quad y_K = \dfrac{4}{9} \quad$ et $\quad z_K = 1 - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4}{9} = 1 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9}$.

Le projeté orthogonal du point E sur le plan (FHI) est le point K de coordonnées $K\left(\dfrac{4}{9}\ ;\ \dfrac{4}{9}\ ;\ \dfrac{7}{9}\right)$.

b. Le volume V d'une pyramide est donné par $V = \dfrac{1}{3}\mathscr{B}h$ où $\mathscr{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur correspondante.

Prenons le triangle EFH comme base, la hauteur issue de I est donc la droite (IL) et la distance de I au plan EFH est donc égale à la longueur IL.

EFH est un triangle rectangle en E et son aire est égale à $\dfrac{1 \times 1}{2} = \dfrac{1}{2}$

L a pour coordonnées $L\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$ donc

$LI^2 = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + (0-0)^2 + (1-0)^2 = 1$ donc LI$= 1$.

On a donc V$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{6}$ $\left(\text{cm}^3\right)$.

c. Calculons maintenant le volume en prenant le triangle FHI comme base. La hauteur sera donc la longueur EK.

$EK^2 = \left(\dfrac{4}{9} - 0\right)^2 + \left(\dfrac{4}{9} - 0\right)^2 + \left(\dfrac{7}{9} - 1\right)^2 = \dfrac{16}{81} + \dfrac{16}{81} + \dfrac{4}{81} = \dfrac{36}{81}$

donc EK$= \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}_{FHI} \times \dfrac{2}{3} &\iff \dfrac{1}{6} \times 3 \times \dfrac{3}{2} = \mathscr{A}_{FHI} \\
&\iff \dfrac{1}{6} \times 3 \times \dfrac{3}{2} = \mathscr{A}_{FHI} \\
&\iff \mathscr{A}_{FHI} = \dfrac{3}{4}
\end{aligned}$$

L'aire du triangle FHI est $\dfrac{3}{4}$ $\left(\text{cm}^2\right)$.