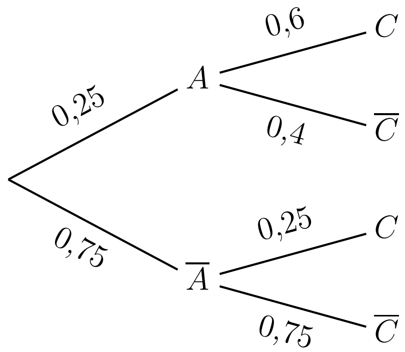
Contrôle 4

EXERCICE 1

1. On complète l'arbre représentant la situation.



2. L'évènement « Le joueur obtient une boule avec la lettre A et un billet de 50 euros » est $\{A \cap C\}$.

$$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0{,}25 \times 0{,}6 = \boxed{0{,}15}$$

3. Les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A \cap C) + P\left(\overline{A} \cap C\right) = P(A) \times P_A(C) + P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(C) \\ &= 0{,}15 + 0{,}75 \times 0{,}25 = 0{,}15 + 0{,}187\,5 \\ &= \boxed{0{,}337\,5} \end{aligned}$$

4. On doit calculer la probabilité $P_{\overline{C}}\left(\overline{A}\right)$:

$$P_{\overline{C}}\left(\overline{A}\right) = \frac{P\left(\overline{A} \cap \overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)} = \frac{P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}\left(\overline{C}\right)}{1 - P(C)} = \frac{0{,}75 \times 0{,}75}{1 - 0{,}337\,5} = \frac{0{,}562\,5}{0{,}662\,5} = \frac{45}{53} \approx 0{,}85.$$

La probabilité que le joueur ait pris une boule avec la lettre B sachant qu'il a obtenu un billet de 10 euros est environ 85 %. L'affirmation est donc vraie.

5. La loi de probabilité de X_1 est donnée par le tableau suivant :

k_i	10	50
$P(X_1 = k_i)$	0,662 5	0,337 5

L'espérance de X_1 est donc :

$$E(X_1) = 10 \times 0{,}662\,5 + 50 \times 0{,}337\,5 = 6{,}625 + 16{,}875 = \boxed{23{,}5}.$$

La variance de X_1 est donc :

$$\begin{aligned} V(X_1) &= E\left(X_1^2\right) - \left[E(X_1)\right]^2 = (100 \times 0{,}662\,5 + 2\,500 \times 0{,}337\,5) - 23{,}5^2 \\ &= 66{,}25 + 843{,}75 - 552{,}25 = \boxed{357{,}75}. \end{aligned}$$

EXERCICE 2

Partie A

1. Pour $x \geqslant 2$: $3x - 2 \geqslant 4 > 0$ donc f est bien définie et dérivable.

   $\forall x \in [2\ ;\ +\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}} > 0$

   f' est à valeurs strictement positives sur $[2\ ;\ +\infty[$, donc f est strictement croissante sur cet intervalle.

   On a : $f(2) = \sqrt{3 \times 2 - 2} = \sqrt{4} = 2$

   Et : $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x + 2 = +\infty$,

   donc, par composition (avec $y = 3x + 2$) : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x-2} = \lim\limits_{y \to +\infty} \sqrt{y} = +\infty$.

2. a) *Initialisation :* Pour $n = 0$, $u_0 = 6 \geqslant 2$.
   de plus : $u_1 = f(6) = \sqrt{3 \times 6 - 2} = \sqrt{16} = 4 \geqslant 2$.
   Donc on a bien : $2 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 6$: l'inégalité est vraie pour $n = 0$.
   Hérédité : Supposons que, pour un entier n naturel donné, l'inégalité est vraie, c'est-à-dire : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.
   Montrons que l'inégalité suivante est vraie, c'est-à-dire : $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.
   Par hypothèse de récurrence : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.
   Comme f est croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$: $f(2) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(6)$
   D'après la relation de récurrence de (u_n) : $\sqrt{3 \times 2 - 2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \sqrt{3 \times 6 - 2}$.
   En effectuant les calculs : $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
   Enfin, comme $4 \leqslant 6$, ce qui précède implique : $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.
   Si l'inégalité est vraie pour un entier naturel n donné, alors on prouve qu'elle est aussi vraie pour l'indice suivant, $n + 1$.
   Conclusion : L'inégalité est vraie pour l'indice $n = 0$, et pour tout n entier naturel, elle est héréditaire. Par application du principe de récurrence, on peut affirmer que, pour tout n entier naturel, on a : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.

   b) De la question précédente on tire :
   - $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$: la suite (u_n) est décroissante ;
   - $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leqslant u_n$: la suite (u_n) est minorée par 2 ;

   (u_n) est décroissante et minorée par 2, donc elle converge vers une limite ℓ qui vérifie : $2 \leqslant \ell$.

3. Soit x un réel supérieur à 2 :

   $$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \sqrt{3x-2} = x \\ &\iff 3x - 2 = x^2 \quad \text{car } x \geqslant 2 \text{ donc } 3x - 2 \geqslant 0 \\ &\iff x^2 - 3x + 2 = 0 \\ &\iff (x-1)(x-2) = 0 \end{aligned}$$

   Le trinôme du second degré a donc deux racines 1 et 2.

   Comme ℓ vérifie $\ell \geqslant 2$, seule la racine 2 peut être égale à ℓ.

   On a donc $\ell = 2$.

4. a) La suite (u_n) converge vers 2, donc tout intervalle ouvert contenant 2 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Un intervalle ouvert contenant 2 est de la forme $]b\ ;\ a[$, avec $a > 2$, ou a qui est $+\infty$. Donc pour tout $a > 2$, il existe un rang N_0 à partir duquel $u_n < a$.

   La boucle `while` se termine donc après N_0 itérations, et `rang`(2.000001) renvoie la valeur N_0.

   Le seul risque que l'algorithme ne se termine pas avec un $a > 2$ serait que le réel a soit trop proche de 2, et que les algorithmes utilisés par python donnent une valeur approchée trop peu précise des différents termes u_n pour que la boucle se termine.

   b) D'après ce que l'on a expliqué précédemment, l'instruction renvoie un résultat si et seulement si $a > \ell = 2$.

   Donc pour $a > 2$.

Partie B

1. On a : $v_1 = 3 - \dfrac{2}{v_0} = 3 - \dfrac{2}{6} = 3 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{3}$.

2. a) Soit n un entier naturel quelconque. Déterminons la relation de récurrence de la suite (w_n).

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1} - 1}{v_{n+1} - 2} = \frac{3 - \dfrac{2}{v_n} - 1}{3 - \dfrac{2}{v_n} - 2} = \frac{2 - \dfrac{2}{v_n}}{1 - \dfrac{2}{v_n}}$$

$$w_{n+1} = \frac{\dfrac{2v_n - 2}{v_n}}{\dfrac{v_n - 2}{v_n}} = \frac{2v_n - 2}{v_n - 2} = \frac{2(v_n - 1)}{v_n - 2} = 2w_n$$

   Au vu de sa relation de récurrence, (w_n) est géométrique de raison 2.

   Son premier terme est : $w_0 = \dfrac{v_0 - 1}{v_0 - 2} = \dfrac{6 - 1}{6 - 2} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$.

   b) Puisque (w_n) est géométrique, de premier terme $w_0 = 1{,}25$ et de raison $q = 2$, par propriété, on en déduit que, pour tout entier n naturel, on a : $w_n = 1{,}25 \times 2^n$.

   On admet la relation $w_n - 1 = \dfrac{1}{v_n - 2}$.

   Avec un premier terme strictement positif et une raison strictement supérieure à 1, la suite (w_n) est strictement croissante, et donc elle est minorée par son premier terme : 1,25. Le nombre $w_n - 1$ sera donc toujours non nul.

   Donc en inversant la relation admise, on a : $v_n - 2 = \dfrac{1}{w_n - 1} = \dfrac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}$.

   Ce qui implique : $v_n = 2 + \dfrac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}$.

   c) Comme $w_0 = 1{,}25 > 0$ et $q = 2 > 1$, par propriété : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}25 \times 2^n = +\infty$.

   Par limite de la somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}25 \times 2^n - 1 = +\infty$.

Puis, par limite de l'inverse : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} = 0$.

Finalement, par limite de la somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.

3. Résolvons : $v_n < 2{,}01$:

$$\begin{aligned}
v_n < 2{,}01 &\iff 2 + \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} < 2{,}01 \\
&\iff \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} < 0{,}01 \\
&\iff 1 < 0{,}01(1{,}25 \times 2^n - 1) \quad \text{car, pour tout } n \text{ naturel, on a : } \quad 1{,}25 \times 2^n - 1 > 0 \\
&\iff 1 < 0{,}0125 \times 2^n - 0{,}01 \\
&\iff 1{,}01 < 0{,}0125 \times 2^n \\
&\iff \frac{1{,}01}{0{,}0125} < 2^n \quad \text{car } 0{,}0125 > 0 \\
&\iff 80{,}8 < 2^n \\
&\iff \ln(80{,}8) < n\ln(2) \quad \text{car la fonction ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+} \\
&\iff \frac{\ln(80{,}8)}{\ln(2)} < n \quad \text{car } \ln(2) > 0 \\
&\iff n > \frac{\ln(80{,}8)}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

$\dfrac{\ln(80{,}8)}{\ln(2)} \approx 6{,}34$. Le plus petit entier n vérifiant $v_n < 2{,}01$ est donc $n = 7$.

Partie C

Comme on a démontré dans la **partie A** que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, on explore les premiers termes de la suite à la calculatrice. On constate que $u_{16} \approx 2{,}012 \geqslant 2{,}01$, alors que $u_{17} \approx 2{,}009 < 2{,}01$.

On a donc, pour tout entier n supérieur ou égal à 17 : $1{,}99 < 2 < u_n \leqslant u_{17} < 2{,}01$

et donc, en particulier : $n \geqslant 17 \implies u_n \in]1{,}99\ ;\ 2{,}01[$.

D'après la **partie B**, on a pour tout n entier naturel :

$1{,}25 \times 2^n \geqslant 1{,}25$, donc $1{,}25 \times 2^n - 1 \geqslant 0{,}25 > 0$, on en déduit : $\dfrac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} > 0$.

Finalement, on a : $v_n = 2 + \dfrac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} > 2$.

D'après la dernière question de la **partie B**, on a : $n \geqslant 7 \implies v_n < 2{,}01$.

Ainsi, on a : $n \geqslant 7 \implies 1{,}99 < 2 < v_n < 2{,}01$.

Donc les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle à partir de l'indice 7.

Pour que les deux conditions soient réunies, il faut donc que l'indice soit simultanément supérieur à 7 et à 17, donc, en conclusion, c'est à partir de l'indice $N = 17$ que les termes v_n et u_n sont dans l'intervalle $]1{,}99\ ;\ 2{,}01[$.

Contrôle 4

EXERCICE 3 On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. On détermine $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{ donc } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 - 8\ln(x) = +\infty \text{ et donc } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

2. On admet que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - 8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$.

   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \text{ et donc } \lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1$$

   $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc } \lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x^2}\right) = +\infty \text{ et donc } \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

3. Calcul de la dérivée sur $]0\ ;\ +\infty[$:

   $$f'(x) = 2x - 8 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 8}{x} = \frac{2\left(x^2 - 4\right)}{x} = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}$$

4. Pour étudier les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$, on cherche le signe de $f'(x)$.

x	0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$+$		$+$	
x	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

   $f(2) = 4 - 8\ln(2)$ On en déduit le tableau des variations de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

x	0		2		$+\infty$
Signe de f'	$\|\|$	$-$	0	$+$	
Variations de f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$4 - 8\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. $4 - 8\ln(2) \approx -1{,}55 < 0$ donc on complète le tableau de variations.

x	0		α		2		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	↘	0	↘	$4-8\ln(2)$	↗	$+\infty$

La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc continue sur cet intervalle, donc continue sur $]0\ ;\ 2[$. Sur l'intervalle $]0\ ;\ 2[$, la fonction f est continue et strictement décroissante ; elle passe d'une valeur positive à une valeur négative donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]0\ ;\ 2[$. On l'appelle α.

6. On admet que, sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β. On complète le tableau de variations de f et on en déduit le signe de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

x	0		α		2		β		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	↘	0	↘	$4-8\ln(2)$	↗	0	↗	$+\infty$
Signe de f		$+$	0		$-$		0	$+$	

7. Pour tout réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k$; donc $g_k(x) = f(x) + k$.

   La fonction g_k a donc les mêmes variations que f et elle a donc pour minimum sur $]0\ ,\ +\infty[$ le nombre $4 - 8\ln(2) + k$. Pour que g_k soit positive ou nulle, il faut que ce minimum soit positif ou nul, donc $4 - 8\ln(2) + k \geqslant 0$ soit $k \geqslant 8\ln(2) - 4$.

   Donc $8\ln(2) - 4$ est la plus petite valeur de k telle que $g_k \geqslant 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.