Lycée Schuman Perret.
Janvier 2026.

Contrôle 4

T$^{\text{erm}}$ spé maths

Rappels : présentation soignée, exercices clairement séparés, résultats encadrés, tableaux à la règle et au crayon.

EXERCICE 1 On dispose d'un sac et de deux urnes A et B.

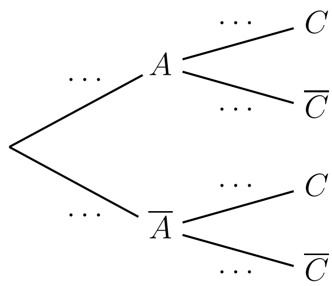
- Le sac contient 4 boules : 1 boule avec la lettre A et 3 boules avec la lettre B.
- L'urne A contient 5 billets : 3 billets de 50 euros et 2 billets de 10 euros.
- L'urne B contient 4 billets : 1 billet de 50 euros et 3 billets de 10 euros.

Un joueur prend au hasard une boule dans le sac :

- si c'est une boule avec la lettre A, il prend au hasard un billet dans l'urne A.
- si c'est une boule avec la lettre B, il prend au hasard un billet dans l'urne B.

On note les évènements suivants :

- A : le joueur obtient une boule avec la lettre A.
- C : le joueur obtient un billet de 50 euros.



1. Recopier et compléter l'arbre ci-contre représentant la situation.
2. Quelle est la probabilité de l'évènement « *le joueur obtient une boule avec la lettre* A *et un billet de* 50 € ?
3. Démontrer que la probabilité $P(C)$ est égale à 0,337 5.
4. Le joueur a obtenu un billet de 10 euros.

   L'affirmation « *Il y a plus de* 80 % *de chances qu'il ait au préalable obtenu une boule avec la lettre* B » est-elle vraie ? Justifier.
5. On note X_1 la variable aléatoire qui donne la somme, en euros, obtenue par le joueur.

   Exemple : si le joueur obtient un billet de 50 €, on a $X_1 = 50$.

   Montrer que l'espérance $E(X_1)$ est égale à 23,50 et interpréter le résultat.
6. Calculer la variance $V(X_1)$.

EXERCICE 2

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[2\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{3x-2}.$$

1. Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

x	2		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$

   On admet que la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel, $un + 1 = f(u_n)$ est bien définie.

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.
   b) En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On appelle ℓ la limite de (u_n).
   On admet qu'elle est solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer la valeur de ℓ.
   On considère la fonction `rang` écrite ci-dessous en langage Python.
   On rappelle que $\text{sqrt}(x)$ renvoie la racine carrée du nombre x.

```
from math import *

def rang(a) :
  u = 6
  n=0
  while u > = a :
    u = sqrt(3*u - 2)
    n = n+1
  return n
```

   a) Pourquoi peut-on affirmer que `rang`(2.000001) renvoie une valeur ?
   b) Pour quelles valeurs du paramètre a l'instruction `rang`(a) renvoie-t-elle un résultat ?

Partie B

On admet que la suite (v_n) vérifiant $v_0 = 6$ et, pour tout n, entier naturel, $v_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{v_n}$ est bien définie.

1. Calculer v_1.
2. Pour tout n entier naturel, on admet que $v_n \neq 2$ et on pose :

$$w_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2}$$

   a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2 et préciser son premier terme w_0.

   b) On admet que, pour tout n entier naturel,

$$w_n - 1 = \frac{1}{v_n - 2}.$$

   En déduire que, pour tout n entier naturel,

$$v_n = 2 + \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}$$

   c) Calculer la limite de (v_n).

3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $v_n < 2{,}01$ en résolvant l'inéquation.

Partie C

À l'aide des parties précédentes, déterminer le plus petit entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, les termes v_n et u_n appartiennent à l'intervalle $]1{,}99\,; 2{,}01[$.

EXERCICE 3 On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

2. On admet que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - 8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$.

   En déduire la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. Montrer que, pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2 - 4\right)}{x}$.

4. Étudier les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.

   On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

5. Démontrer que, sur l'intervalle $]0\,;\,2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α).

6. On admet que, sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de β).

   En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

7. Pour tout nombre réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k.$$

   En s'aidant du tableau de variations de f, déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.