EXERCICE 1 [2pts]

1. Recopier et compléter l'égalité :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = \dfrac{2n+3}{5n^2+1} = \dfrac{n \times \left(2+\frac{3}{n}\right)}{n^2 \times \left(5+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{n}{n^2} \times \dfrac{\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\left(5+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{2+\frac{3}{n}}{5+\frac{1}{n^2}}$

2. Justifier alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \times \dfrac{2}{5} = 0$

EXERCICE 2 [2pts] Sachant que la suite (U_n) est arithmétique, que $U_{17} = 12$ et $U_{150} = 107$

1. Calculer sa raison R et son premier terme U_0

$107 = u_{150} = u_0 + 150R$ et $12 = u_{17} = u_0 + 17R$

donc par différence $u_{150} - u_{17} = 107 - 12 = 133R$ donc $R = \dfrac{95}{133} = \dfrac{5}{7}$

puis $u_{17} = u_0 + 17R$ donc $u_0 = u_{17} - 17R = -\dfrac{1}{7}$

2. En déduire que $U_{59} = 42$

$u_{59} = u_0 + 59 \times R = -\dfrac{1}{7} + 59 \times \dfrac{5}{7} = 42$

EXERCICE 3 [5pts]

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 62$ et pour tout entier $n \geqslant 0$ on a : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Calculer u_1 et et une valeur approchée à 10^{-2} de u_2.

$u_1 = \sqrt{62+2} = \sqrt{64} = 8$ puis $u_2 = \sqrt{8+2} = \sqrt{10} \approx 3{,}17$

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2 \leqslant u_{n+1} < u_n$.

Définition : pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit H_n la proposition : " $2 \leqslant u_{n+1} < u_n$ "

Initialisation : pour l'entier $n = 0$, on a : $u_1 = 8$ et $u_0 = 62$ donc $2 \leqslant u_1 < u_0$
la proposition H est vraie au rang 0

Hérédité : Soit n un entier supérieur ou égal à 0, pour lequel on suppose que la proposition H est vraie

pour cet entier on a donc $2 \leqslant u_{n+1} < u_n$

donc $4 \leqslant u_{n+1} + 2 < u_n + 2$ en ajoutant 2 partout

donc $\sqrt{4} \leqslant \sqrt{u_{n+1} + 2} < \sqrt{u_n + 2}$ car $\sqrt{\ }$ est strictement croissante sur $[4; +\infty[$

c'est à dire $2 \leqslant u_{n+2} < u_{n+1}$

donc la proposition H est vraie au rang $n + 1$

Conclusion : on sait que H est vraie pour l'entier initial 0

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si la proposition est vraie au rang n alors on a démontré qu'elle était encore vraie au rang $n + 1$

donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition H est vraie.

C'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2 \leqslant u_{n+1} < u_n$

3. Que peut-on en déduire ?

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} < u_n$ la suite est strictement décroissante

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $2 \leqslant u_n$ la suite est minorée par 2

Bonus : on peut alors en déduire que la suite est convergente vers une limite L vérifiant $L \geqslant 2$

EXERCICE 4 [5pts]

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2n^2 + 7n + 6 = (n + 2)(2n + 3)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(n + 2)(2n + 3) = 2n^2 + 3n + 4n + 6 = 2n^2 + 7n + 6$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1) \times \big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6} \\
&= \frac{(n+1) \times \big(2n^2 + n + 6n + 6\big)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}
\end{aligned}$$

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Définition : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit H_n la proposition : "$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$"

Initialisation : pour l'entier $n = 1$, on a d'une part : $1^2 + \cdots + n^2 = 1^2$
et d'autre part $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$ la proposition H est vraie au rang 1

Hérédité : Soit n un entier supérieur ou égal à 1, pour lequel on suppose que la proposition H est vraie

pour cet entier on a donc $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

donc $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

donc $1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

donc $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+1+2)(2(n+1)+1)}{6}$

donc la proposition H est vraie au rang $n+1$

Conclusion : on sait que H est vraie pour l'entier initial 1

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si la proposition est vraie au rang n alors on a démontré qu'elle était encore vraie au rang $n+1$

donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition H est vraie.

C'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

EXERCICE 5 [6pts] Au 31 décembre 2024, un magazine possède 450 000 abonnés. On note que chaque année, seuls 80 % des abonnés de l'année précédente renouvellent leur abonnement auxquels viennent s'ajouter 180 000 nouveaux abonnés.

On note (u_n) une suite modélisant le nombre d'abonnés, exprimé en milliers, au 31 décembre de l'année $(2024+n)$. On a donc $u_0 = 450$.

1. Calculer, selon ce modèle, le nombre d'abonnés au 31 décembre 2025.

$u_1 = 450 \times 0{,}8 + 180 = 540$ C'est à dire 540000 abonnés.

On admet alors que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 180$.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 900$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8. Préciser son premier terme.

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 900 \\ &= 0{,}8u_n + 180 - 900 \\ &= 0{,}8u_n - 720 \\ &= 0{,}8(v_n + 900) - 720 \\ &= 0{,}8v_n \end{aligned}$$

La suite v est géométrique de raison $q = 0{,}8$.

Par ailleurs, on a $v_0 = u_0 - 900 = 450 - 900 = -450$

b. Soit n un entier naturel. Exprimer v_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel n, on a :

$v_n = v_0 \times q^n = -450 \times 0{,}8^n$

c. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = -450 \times 0{,}8^n + 900$.

Pour tout entier naturel n, on a :

$u_n = v_n + 900 = -450 \times 0{,}8^n + 900$

3. La direction du magazine affirme qu'à long terme, le nombre d'abonnés dépassera 900 000. Que penser de cette affirmation ? Justifier la réponse.

Pour tout entier naturel n, on a :

$u_n = v_n + 900 = 900 - 450 \times 0{,}8^n \quad < \quad 900 \qquad \text{car } 450 \times 0{,}8^n > 0$

donc le nombre d'abonnés ne dépassera jamais 900000

4. En s'appuyant sur ce modèle, au 31 décembre de quelle année le nombre d'abonnés dépassera-t-il 800 000 pour la première fois ?

En calculant les premiers termes de la suite u, on découvre que le nombre d'abonnés dépassera 800000 pour u_7 c'est à dire le 31 décembre 2031