Contrôle 1

EXERCICE 1 [2pts]

1. Recopier et compléter l'égalité :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = \dfrac{2n+3}{5n^2+1} = \dfrac{n \times \left(\cdots\right)}{n^2 \times \left(\cdots\right)} = \dfrac{n}{n^2} \times \dfrac{\left(\cdots\right)}{\left(\cdots\right)} = \cdots \times \dfrac{\cdots}{\cdots}$

2. Justifier alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

EXERCICE 2

[2pts] Sachant que la suite (U_n) est arithmétique, que $U_{17} = 12$ et $U_{150} = 107$

1. Calculer sa raison R et son premier terme U_0
2. En déduire que $U_{59} = 42$

EXERCICE 3 [5pts]

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 62$ et pour tout entier $n \geqslant 0$ on a : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Calculer u_1 et et une valeur approchée à 10^{-2} de u_2.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2 \leqslant u_{n+1} < u_n$.
3. Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 4 [5pts]

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

EXERCICE 5

[6pts] Au 31 décembre 2024, un magazine possède 450 000 abonnés. On note que chaque année, seuls 80 % des abonnés de l'année précédente renouvellent leur abonnement auxquels viennent s'ajouter 180 000 nouveaux abonnés.

On note (u_n) une suite modélisant le nombre d'abonnés, exprimé en milliers, au 31 décembre de l'année $(2024 + n)$. On a donc $u_0 = 450$.

1. Calculer, selon ce modèle, le nombre d'abonnés au 31 décembre 2025.

   On admet alors que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 180$.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 900$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8. Préciser son premier terme.

   b. Soit n un entier naturel. Exprimer v_n en fonction de n.

   c. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = -450 \times 0{,}8^n + 900$.

3. La direction du magazine affirme qu'à long terme, le nombre d'abonnés dépassera 900 000. Que penser de cette affirmation ? Justifier la réponse.

4. En s'appuyant sur ce modèle, au 31 décembre de quelle année le nombre d'abonnés dépassera-t-il 800 000 pour la première fois ?