EXERCICE 1 Calculer en justifiant les limites des suites suivantes.

$u_n = \frac{2+\frac{1}{3^n}}{2^n+4}$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{3^n} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n + 4 = +\infty$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

$u_n = \frac{\sqrt{5n+1}}{3+\sqrt{n}}$

On a $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \times \dfrac{\sqrt{5+\frac{1}{n}}}{\frac{3}{\sqrt{n}}+1} = \dfrac{\sqrt{5+\frac{1}{n}}}{\frac{3}{\sqrt{n}}+1}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{5+\frac{1}{n}} = \sqrt{5}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}+1 = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{5}$

$u_n = \frac{2n^2-3n+2}{1-n}$

$u_n = \dfrac{n^2}{n} \times \dfrac{2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n}-1} = n \times \dfrac{2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n}-1}$
or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - 1 = -1$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

$u_n = \frac{3+2(-1)^n}{5n+1}$

On a : $\frac{3-2}{5n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{3+2}{5n+1}$ c'est à dire $\frac{1}{5n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{5}{5n+1}$
or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{5n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{5n+1} = 0$ donc par théorème des Gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

EXERCICE 2 Soit S_n la somme des nombres entiers de 1 à n tel que :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

Soit $\mathrm{C_n}$ la somme des cubes des nombres entiers de 1 à n tel que :

$$C_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

1. Calculer S_n et C_n lorsque $n = 1{,}2{,}3{,}4{,}5$. Que pouvons-nous conjecturer ?

n	S_n	C_n
1	1	1
2	3	9
3	6	36
4	10	100
5	15	225

il semble que $C_n = S_n^2$

2. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 1, C_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

☐ Soit H_n la proposition "$C_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$"

☐ Pour $n = 1$, on a : $C_1 = 1$ et $\dfrac{1^2 \times 2^2}{4} = 1$ donc H_1 est vraie.

☐ Soit n un entier naturel non nul pour lequel H_n est vraie

pour cet entier n, on a : $C_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

or $C_{n+1} = C_n + (n+1)^3$

donc $C_{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1)}{4}$

donc $C_{n+1} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2)}{4}$

donc H_{n+1} est vraie.

☐ H_1 est vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si H_n est vraie alors H_{n+1} aussi
donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est vraie
C'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $C_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

EXERCICE 3 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3} \times u_n + \dfrac{4}{3}$.

1. Calculer u_1 et u_2. $u_1 = \dfrac{1}{3}u_0 + \dfrac{4}{3} = 3$ puis $u_2 = \dfrac{1}{3}u_1 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{7}{3} \approx 2{,}33$

2. Démontrer que, pour tout entier n,$u_n \geq 2$.

   ☐ Soit H_n la proposition "$u_n \geq 2$"

   ☐ Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 5$ donc H_0 est vraie.

   ☐ Soit n un entier naturel pour lequel H_n est vraie

   pour cet entier n, on a : $u_n \geqslant 2$

   donc $\dfrac{1}{3}u_n \geqslant \dfrac{2}{3}$

   puis $\dfrac{1}{3}u_n + 4 \geqslant \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3}$

   c'est à dire $u_{n+1} \geqslant 2$

   donc H_{n+1} est vraie.

   ☐ H_1 est vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si H_n est vraie alors H_{n+1} aussi

   donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie

   C'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geqslant 2$

3. Montrer que (u_n) est une suite décroissante.

   $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{4}{3} = -\dfrac{2}{3}(u_n - 2)$

   or $u_n \geqslant 2$ donc $u_n - 2 \geqslant 0$ et $-\dfrac{2}{3} < 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ donc $u_{n+1} \leqslant u_n$

   la suite est donc décroissante.

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Puisque la suite est décroissante et minorée par 2,

elle converge vers une valeur L qui vérifie $L \geqslant 2$

D'après le théorème des suites monotones bornées, L vérifie $L = \frac{1}{3}L + \frac{4}{3}$

C'est à dire $\frac{2}{3}L = \frac{4}{3}$ donc $L = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 2$

5. On pose pour tout entier n,$v_n = u_n - 2$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} - 2 = \frac{1}{3}(v_n + 2) - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}v_n$

donc la suite (v_n) es géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$. Par ailleurs $v_0 = u_0 - 2 = 5 - 2 = 3$

On a donc $v_n = 3 \times \frac{1}{3^n}$

6. Soit les deux suites :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Déterminer l'expression de S_n et de T_n en fonction de n.

D'après le cours, puisque v est une suite géométrique de premier terme 3 et de raison $\frac{1}{3}$,

on a : $S_n = 3 \times \dfrac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$

$T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 2 + v_k = 2 \times (n+1) + \frac{9}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$

7. Déterminer les limites des deux suites ci-dessus.

Puisque $q = \frac{1}{3}$ vérifie $-1 < q < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = 0$

Par ailleurs : $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 1 = +\infty$

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{9}{2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = +\infty$