Contrôle 1

EXERCICE 1 Calculer en justifiant les limites des suites suivantes.

$$u_n = \frac{2+\frac{1}{3^n}}{2^n+4} \qquad u_n = \frac{\sqrt{5n+1}}{3+\sqrt{n}} \qquad u_n = \frac{2n^2-3n+2}{1-n} \qquad u_n = \frac{3+2(-1)^n}{5n+1}$$

EXERCICE 2 Soit S_n la somme des nombres entiers de 1 à n tel que :

$$S_n = 1+2+3+\cdots+n$$

Soit $\mathrm{C_n}$ la somme des cubes des nombres entiers de 1 à n tel que : $C_n = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

1. Calculer S_n et C_n lorsque $n = 1{,}2{,}3{,}4{,}5$. Que pouvons-nous conjecturer ?
2. Démontrer par récurrence que : $\forall n \geq 1, C_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

EXERCICE 3 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n, $\quad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\times u_n + \dfrac{4}{3}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer que, pour tout entier n,$u_n \geq 2$.
3. Montrer que (u_n) est une suite décroissante.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. On pose pour tout entier n,$v_n = u_n - 2$.

   Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

6. Soit les deux suites :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

   Déterminer l'expression de S_n et de T_n en fonction de n.

7. Déterminer les limites des deux suites ci-dessus.