Corrigé du contrôle N°3

EXERCICE 1 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 - 6x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0_+} 4\ln(x) = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to 0_+} f(x) = -\infty$ donc graphiquement la courbe représentant f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} x(x-6) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} 4\ln(x) = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Pour tout réel x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, on a : $f'(x) = 2x - 6 + \dfrac{4}{x} = \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{x}$.

   b) Étudions le signe de $2x^2 - 6x + 4$. On a : $\Delta = 36 - 32 = 4 > 0$

   donc il y a deux racines $x_1 = \dfrac{-(-6) - \sqrt{4}}{2 \times 2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-(-6) + \sqrt{4}}{2 \times 2} = 2$

   Ce trinôme du second degré est donc négatif entre 1 et 2 et positif ailleurs

   Ce qui nous amène au tableau de signe de $f(x)$ suivant :

x	0		1		2		$+\infty$
$2x^2 - 6x + 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

   D'après ce qui précède on dispose du tableau des variations de f.

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Puisque f est strictement croissante sur $]0; +1[$ puis strictement décroissante sur $]1; 2[$ et continue sur $]0; 2[$, la fonction f admet un maximum local en $x = 1$ dont la valeur est $f(1) = 1 - 6 + 4 = -5$.

EXERCICE 2

1. A $t = 0$, on lit $f(0) = 2{,}5$, le centre de gravité se situé à une hauteur de 2,5m à l'instant initial.

2. a) On a : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = -0 + 1{,}5 \times 0 + 2 = 2$

   b) La position du centre de gravité se stabilise à 2m au bout d'un certain temps.

3. a) Pour tout $x > 0$, on a : $f'(t) = -(-1)e^{-t} + 1{,}5 \times (-2) \times e^{-2t} + 0 = e^{-t} - 3e^{-2t} = e^{-2t} \times (e^{t} - 3)$

   b) $\mathrm{e}^{t} - 3 \geqslant 0$ ssi $e^{t} = 3$ ssi $t = \ln(3)$ Par ailleurs $t \mapsto e^{t} - 3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   c) On peut construire le tableau de signes de la dérivée :

t	0		$\ln(3)$		$+\infty$
$e^{t} - 3$		$-$	0	$+$	
e^{-2t}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

   d) On dispose alors du tableau de variations de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$.

t	0		$\ln(3)$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$2{,}5$	$\searrow$	$f(1) \approx 1{,}84$	$\nearrow$	2

EXERCICE 3

Partie A : Étude du premier protocole

1. a) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ et on note f' sa fonction dérivée.

   On a, pour tout nombre réel t de $[0\,;\,10]$,

$$f'(t) = 3 \times 1 \times \mathrm{e}^{-0{,}5t+1} \quad + \quad 3 \times t \times \mathrm{e}^{-0{,}5t+1} \times (-0{,}5) = 3\mathrm{e}^{-0{,}5t+1}(1 - 0{,}5t).$$

   b) Pour tout $t \in [0; 10]$, $3\mathrm{e}^{-0{,}5t+1} > 0$ et $-0{,}5t + 1 = 0$ ssi $x = 2$

   Par ailleurs la fonction $t \mapsto -0{,}5t + 1$ est affine décroissante.

   On a alors le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

t	0		2		10
$3e^{-0{,}5t+1}$		$+$		$+$	
$-0{,}5t + 1$		$+$	0	$-$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$f(10)$

c) Selon cette modélisation, au bout de 2 heures la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera maximale et vaudra $f(2) = 6$ mg

2. a) Sur $[0;2]$, f est strictement croissante, continue et passe de $f(0) = 0 < 5$ à $f(2) = 6 > 5$, d'après le CTVI (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires), f prend une et une seule fois la valeur 5 entre $x = 0$ et $x = 2$

   On la note α et une valeur approchée à 10^{-2} près est 1,02

   b) D'après ce qui précède, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole est de $3{,}46 - 1{,}02 = 2{,}44$h , soit 2h et 27 minutes environ.

Partie B : Étude du deuxième protocole

1. D'après l'énoncé, le patient aura $u_1 = 0{,}7u_0 + 1{,}8 = 1{,}4 + 1{,}8 = 3{,}2$, mg de médicament dans le sang après l'injection de la première heure.

2. Comme la quantité diminue de 30%, il reste 70% de la quantité précédente et on ré-injecte 1,8 donc pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8$.

3. a) Soit H_n définie sur $\mathbb{N}$ par "$u_n \leqslant u_{n+1} < 6$"

   On a : $u_0 = 2$ et $u_1 = 3{,}2 < 6$ donc $u_0 \leqslant u_{0+1} < 6$ donc H_0 est vraie.

   Soit n un entier naturel, si H_n est vraie alors pour cet entier, on a : $u_n \leqslant u_{n+1} < 6$

   donc $0{,}7 \times u_n \leqslant 0{,}7 \times u_{n+1} < 4{,}2$

   donc $0{,}7 \times u_n + 1{,}8 \leqslant 0{,}7 \times u_{n+1} + 1{,}8 < 4{,}2 + 1{,}8$

   ce qui signifie que $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$

   donc H_{n+1} est vraie.

   Conclusion : H_0 est vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si H_n est vraie alors H_{n+1} aussi

   donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie.

   b) D'après ce qui précède, la suite (u_n) est croissante et majorée par 6 donc elle est convergente. On note ℓ sa limite.

   c) D'après le théorème des suites monotones bornée ℓ vérifie donc $\ell = 0{,}7 \times \ell + 1{,}8$

   On a donc $0{,}6\ell = 1{,}8$ donc $\ell = 6$. Cela signifie que la quantité de médicament dans le sang augmentera jusqu'à une valeur limite de 6mg.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

   a) pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 6 - u_{n+1}$,
   donc $v_{n+1} = 6 - (0{,}7u_n + 1{,}8) = 4{,}2 - 0{,}7u_n = 0{,}7(6 - u_n) = 0{,}7v_n$
   donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 et de premier terme $v_0 = 6 - u_0 = 4$.

   b) D'après le cours, l'expression de v_n en fonction de n est $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times 0{,}7^n$
   Comme $v_n = 6 - u_n$ pn a aussi $u_n = 6 - v_n = 6 - 4 \times 0{,}7^n$

   c) On peut résoudre $6 - 4 \times 0{,}7^n > 5{,}5$.
   C'est à dire $0{,}5 > 4 \times 0{,}7^n$ puis $0{,}125 > 0{,}7^n$ puis $\ln(0{,}125) > n\ln(0{,}7)$ car ln est une fonction strictement croissante sur $]0; +\infty[$
   on a donc $\dfrac{\ln(0{,}125)}{\ln(0{,}7)} < n$ car $\ln(0{,}7) < 0$, on trouve qu'il faudra 7 injections pour que $u_n > 5{,}5$

FIN