On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   b. Donner un encadrement du réel α d'amplitude $0,01$.
   c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x)$$

   On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé d'origine O. On considère un réel x strictement positif et le point M de la courbe C_g d'abscisse x. On note OM la distance entre les points O et M.

   a. Exprimer la quantité OM^2 en fonction du réel x.
   b. Montrer que, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la quantité OM^2 admet un minimum en α.
   c. La valeur minimale de la distance OM, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, est appelée distance du point O à la courbe $\mathscr{C}_g$. On note d cette distance.
   Exprimer d à l'aide de α.