

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 8 \ln(x)$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2. On admet que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2 \left(1 - 8 \frac{\ln(x)}{x^2}\right)$.

En déduire la limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. Montrer que, pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(x^2 - 4)}{x}$.

4. Étudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.

On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0 ; +\infty[$.

5. Démontrer que, sur l'intervalle $]0 ; 2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α).

6. On admet que, sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de β).

En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

7. Pour tout nombre réel k , on considère la fonction g_k définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g_k(x) = x^2 - 8 \ln(x) + k.$$

En s'aidant du tableau de variations de f , déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.