

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.

Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Les probabilités demandées dans la suite de l'exercice seront arrondies à  $10^{-4}$  près si nécessaire.

### Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.

On considère les événements suivants :

- $A$  : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques »;
- $T$  : « le test est positif »;
- $\bar{A}$  et  $\bar{T}$  sont respectivement les événements contraires de  $A$  et  $T$ .

1. Calculer  $P(A \cap T)$ . On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que  $P(T) = 0,2625$ .
3. On choisit un patient ayant un test positif. Calculer la probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques.
4.
  - a. Parmi les événements suivants, déterminer ceux qui correspondent à un résultat erroné du test :  $A \cap T, \bar{A} \cap T, A \cap \bar{T}, \bar{A} \cap \bar{T}$ .
  - b. On définit l'évènement  $E$  : « le test fournit un résultat erroné ».  
Démontrer que  $p(E) = 0,0625$ .

### Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de  $n$  patients qui ont été testés.

On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise.

On note  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que  $n = 50$ .
  - a. Justifier que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$  de paramètres  $n = 50$  et  $p = 0,0625$ .
  - b. Calculer  $P(X = 7)$ .
  - c. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné.
2. Quelle valeur minimale de la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que  $P(X \geq 10)$  soit supérieure à 0,95?