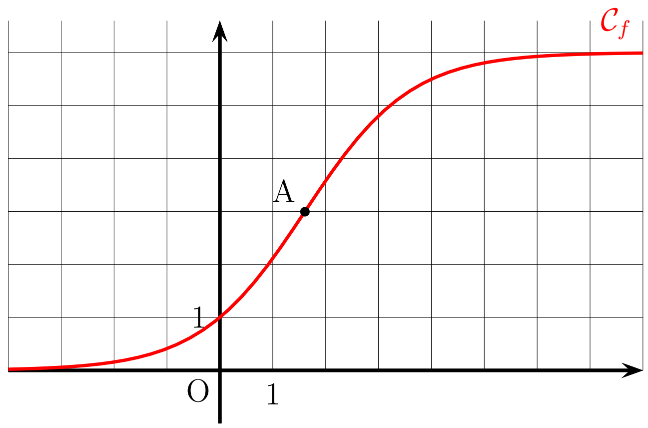
EXERCICE 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}}$

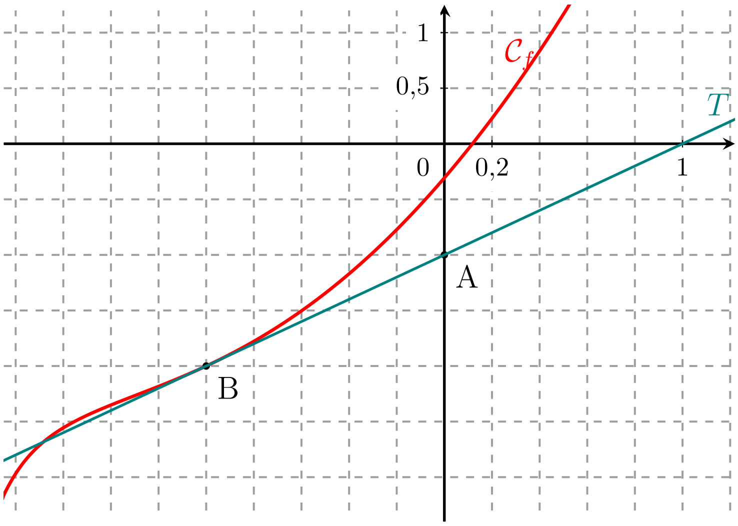
On a représenté sur le schéma ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.



1. Montrer que le point A de coordonnées $(\ln 5\ ;\ 3)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.
3. (a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x, on a :
$$f'(x) = \frac{30\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2}.$$
   (b) En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
4. On admet que :
   - f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f'' sa dérivée seconde ;
   - pour tout réel x,
$$f''(x) = \frac{30\mathrm{e}^{-x}\left(5\mathrm{e}^{-x}-1\right)}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^3}.$$

   (a) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. On montrera en particulier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion.
   (b) Justifier que pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ \ln 5]$, on a : $f(x) \geqslant \dfrac{5}{6}x + 1$.
5. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = k\ln\left(\mathrm{e}^x + 5\right)$, où k est une constante réelle.
   (a) Déterminer la valeur du réel k de sorte que F_k soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 5$ est égale à $6\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$.

EXERCICE 2 On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\ ;\ +\infty[$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1.
On précise que la droite T passe par le point A$(0\ ;\ -1)$.



Partie A : exploitation du graphique.

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2. Interpréter graphiquement ce résultat.

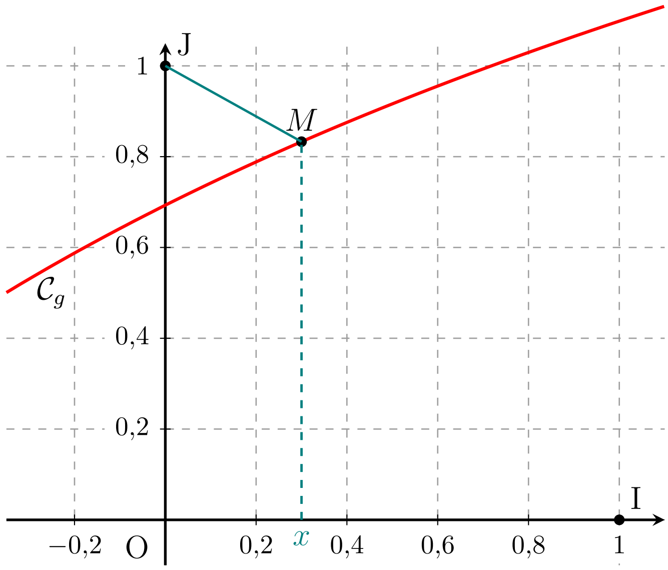
   On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > -2$, $\quad f'(x) = \dfrac{2x^2+6x+5}{x+2}$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\ ;\ +\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2\ ;\ +\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\ ;\ +\infty[$.

6. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale.

Soit g la fonction définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par $\quad g(x) = \ln(x+2)$.
On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (0 ; I , J), représentée ci-après.
Soit M un point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x.
Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.
On considère la fonction h définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par $\quad h(x) = \text{J}M^2$.



1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $\quad h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.

2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\ ;\ +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.
   On admet également que pour tout réel $x > -2$,
   $$h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$$
   où f est la fonction étudiée en **partie B**.
   (a) Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\ ;\ +\infty[$.
   Les limites ne sont pas demandées.
   (b) En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question **4.** de la **partie B**.

3. On notera M_α le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse α.
   (a) Montrer que $\quad \ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.
   (b) En déduire que la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.
   On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.