SERIE D'EXERCICES
équations différentielles

EXERCICE 1 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez.

Affirmation 1 : On considère l'équation différentielle : $(E) \quad y' = \dfrac{1}{2}y + 4$.

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 8, \quad$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Affirmation 2 :Sur $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle (E) : $\quad y' = 2y - \mathrm{e}^{x}$.

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{2x}$ est solution de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 2 On considère (E) l'équation différentielle $y + y' = (2x+3)\mathrm{e}^{-x}$,

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = \left(x^2 + 3x\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y + y' = 0$.
3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 3 On considère une fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$.

On admet que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(t) = (at+b)\mathrm{e}^{-0,5t}$ où a et b sont deux constantes réelles.

1. On admet que la valeur exacte de $f(0)$ est 40. En déduire la valeur de b.
2. On admet que f vérifie l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}5y = 60\mathrm{e}^{-0,5t}$. Déterminer la valeur de a.

EXERCICE 4 On considère l'équation différentielle (E_1) : $\quad y' + 0{,}48y = \dfrac{1}{250}$,
où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(t) = \dfrac{1}{120}$.
   Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1).
2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0{,}48y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).

EXERCICE 5 On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée t, en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$;
- f ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$;
- f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$;
- f est solution sur $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle (E_1) : $\quad y' = 0{,}02y(15 - y)$.

On admet qu'une telle fonction f existe ; le but de cette partie est d'en déterminer une expression.
On note f' la fonction dérivée de f.

1. Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.
Montrer que g est solution de l'équation différentielle (E_2) : $\quad y' = -0{,}3y + 0{,}02$.

2. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2).

3. En déduire que pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$: $f(t) = \dfrac{15}{14\mathrm{e}^{-0{,}3t} + 1}$.

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5. Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 6 On considère l'équation différentielle (E) $\qquad y' + 0{,}4y = \mathrm{e}^{-0{,}4t}$
où y est une fonction de la variable réelle t.
On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(t) = t\mathrm{e}^{-0{,}4t}$.
Vérifier que u est solution de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = f(t) - u(t)$.
Soit (H) l'équation différentielle $y' + 0{,}4y = 0$.

a. Démontrer que si la fonction g est solution de l'équation différentielle (H) alors la fonction f est solution de l'équation différentielle (E).
On admettra que la réciproque est vraie.

b. Résoudre l'équation différentielle (H).

c. En déduire les solutions de (E).

d. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

EXERCICE 7 L'objet de cet exercice est l'étude de l'arrêt d'un chariot sur un manège, à partir du moment où il entre dans la zone de freinage en fin de parcours.On rappelle que t désigne le temps écoulé, en seconde, à partir du moment où un chariot arrive sur la zone de freinage.

On modélise la vitesse instantanée du chariot, en mètre par seconde $\left(\text{m.s}^{-1}\right)$, en fonction de t, par une fonction v définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.
On admet que :

- la fonction v est dérivable sur son ensemble de définition, et on note v' sa fonction dérivée;
- la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) : $\quad y' + 0{,}6y = \text{e}^{-0{,}6t}$,
  où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y.
  On précise de plus que, lors de son arrivée sur la zone de freinage, la vitesse du chariot est égale à 12 m.s^{-1}, c'est-à-dire $v(0) = 12$.

1. **a.** On considère l'équation différentielle (E') : $\quad y' + 0{,}6y = 0$.
Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') sur $[0\ ;\ +\infty[$.
b. Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = t\text{e}^{-0{,}6t}$.
Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E).
c. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0\ ;\ +\infty[$.
d. En déduire que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a : $v(t) = (12+t)\text{e}^{-0{,}6t}$.

EXERCICE 8 Une fonction recherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0{,}05y - 0{,}5 \quad (E_1)$$

Résoudre l'équation différentielle (E_1) avec la condition initiale $y(0) = 50$.