1 Exercices de base en géométrie dans l'espace

EXERCICE 1 Dans un cube $ABCDEFGH$
On pose les questions suivantes :

- Comment peut-on repérer un sommet du cube à l'aide de coordonnées ?
- Peut-on décrire une arête du cube à l'aide d'un vecteur ?

Dans les exercices qui suivent le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

EXERCICE 2 On considère les points : $A(1; 0; 2)$ et $B(3; 1; 4)$

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. En déduire un vecteur directeur de la droite (AB).
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

EXERCICE 3 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points :

$$M(2; 1; 0), \quad N(4; 3; 2)$$

1. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MN).

EXERCICE 4 On considère la droite d définie par : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

1. Le point $A(3; 0; 7)$ appartient-il à la droite d ?
2. Justifier la réponse.

EXERCICE 5 On considère un cube $ABCDEFGH$.
On pose les questions suivantes :

- Combien de points faut-il pour définir un plan ?
- Comment peut-on décrire analytiquement la face $ABCD$ du cube ?

EXERCICE 6 On considère les points : $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. Montrer que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
3. On cherche une équation du plan (ABC) de la forme $ax + by + cz + d = 0$
   Déterminer les coefficients a, b, c et d.

EXERCICE 7 Déterminer une équation du plan :

passant par le point $A(1;2;3)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2;-1;1)$

EXERCICE 8 On considère le plan P d'équation :

$$2x - y + z - 3 = 0$$

1. Le point $M(1;2;3)$ appartient-il au plan P ?
2. Justifier la réponse par un calcul.

EXERCICE 9 Que répondre à la question :

« Une droite et un plan peuvent-ils ne pas se rencontrer dans l'espace ? »

EXERCICE 10 On considère la droite d définie par : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$

et le plan P d'équation : $x + y + z - 3 = 0$

1. Vérifier que le point $A(1;2;0)$ appartient à la droite d.
2. Déterminer si la droite d coupe le plan P.
3. Le cas échéant, déterminer les coordonnées du point d'intersection.

EXERCICE 11 On considère la droite d définie par : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$

et le plan P d'équation : $x + y + z - 4 = 0$

Déterminer la position relative de la droite d et du plan P.

EXERCICE 12 On considère la droite d définie par : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$

et le plan P d'équation : $x + y - z = 0$

1. Vérifier qu'un point de la droite appartient au plan.
2. Montrer que tout point de la droite appartient au plan.
3. Conclure sur la position relative de d et P.

EXERCICE 13 Comment répondre à ces deux questions ?

« Comment reconnaître qu'une droite est perpendiculaire à un plan ? » « Peut-on parler d'orthogonalité entre deux plans ? »

EXERCICE 14 On considère la droite d définie par : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

et le plan P d'équation : $2x - y + z - 4 = 0$

1. Donner un vecteur directeur de la droite d.
2. Donner un vecteur normal au plan P.
3. Calculer le produit scalaire de ces deux vecteurs.
4. Conclure quant à l'orthogonalité de la droite d et du plan P.

EXERCICE 15 On considère les plans P_1 et P_2 d'équations :

$$P_1 : x + y - z = 0$$

$$P_2 : 2x - y + z + 1 = 0$$

1. Donner un vecteur normal à chacun des deux plans.
2. Calculer le produit scalaire de ces deux vecteurs normaux.
3. Conclure sur la position relative des plans P_1 et P_2.

EXERCICE 16 On considère la droite d définie par :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

et le plan P d'équation :

$$2x + y - z + 1 = 0$$

Déterminer si la droite d est orthogonale au plan P.

EXERCICE 17 Déterminer si les plans P_1 et P_2 d'équations :

$$P_1 : x - 2y + z - 1 = 0$$

$$P_2 : 2x + y + 2z + 3 = 0$$

sont orthogonaux.

EXERCICE 18 Comment répondre à la question :

« Comment déterminer la distance d'un point à un plan dans l'espace ? »

EXERCICE 19 On considère le point :

$$A(1;2;3)$$

et le plan P d'équation :

$$2x-y+z-3=0$$

1. Donner un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan P.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par A et orthogonale au plan P.
3. Montrer que la droite d coupe le plan P en un point H.
4. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur le plan P.

EXERCICE 20 Calculer la distance du point $M(2;-1;3)$ au plan P d'équation :

$$x-2y+2z-4=0$$

EXERCICE 21 On considère le point $A(0;1;2)$ et le plan P d'équation :

$$x+y+z-3=0$$

1. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur le plan P.
2. Calculer la distance AH.

2 Extraits de sujet de bac

1. **Représentation paramétrique d'une droite**
   Déterminer les équations paramétriques de la droite passant par les points

   $$A(1;2;0) \quad \text{et} \quad B(3;0;4)$$

2. **Position relative de deux droites**
   On considère les droites d_1 et d_2 de l'espace, définies par :

   $$d_1 : \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=t \end{cases} \quad , \quad d_2 : \begin{cases} x=2+s \\ y=-1+2s \\ z=1+s \end{cases}$$

   Déterminer si d_1 et d_2 sont sécantes, parallèles, coplanaires ou non coplanaires.

3. **Position relative droite / plan**

   Étudier la position relative de la droite d d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$

   et du plan P d'équation $x + y + z - 4 = 0$.

4. **Équation cartésienne d'un plan**
   Déterminer une équation du plan passant par les points :

   $$A(1; 0; 0), \quad B(0; 1; 0), \quad C(0; 0; 1)$$

5. **Appartenance d'un point à une droite ou un plan**
   Vérifier si le point $M(2; 1; 3)$ appartient à :
   - la droite d : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$
   - le plan P : $2x - y + z - 3 = 0$

6. **Vrai / Faux justifié**
   Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier :
   (a) Trois points quelconques définissent toujours un plan.
   (b) Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle passe par un point du plan.

7. **Projeté orthogonal d'un point sur un plan**
   Déterminer le projeté orthogonal du point

   $$A(1; 2; 3)$$

   sur le plan d'équation $2x - y + z - 3 = 0$.

8. **Distance d'un point à un plan**
   Calculer la distance du point $M(2; -1; 3)$ au plan P d'équation $x - 2y + 2z - 4 = 0$.

9. **Droite orthogonale à un plan**
   Vérifier si la droite

   $$d : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

   est orthogonale au plan $P : 2x + y - z + 1 = 0$.

10. **Problème combiné**
    Dans un cube $ABCDEFGH$ de côté 1, placé dans un repère orthonormé :
    (a) Déterminer l'équation du plan (ABC).
    (b) Étudier la position relative de la droite (DH) avec le plan (ABC).
    (c) Calculer la distance du point D au plan (ABC).