série d'exercices
étude de fonctions

EXERCICE 1 *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point.*
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.

On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.
b. La suite (w_n) converge vers 1.
c. La suite (u_n) est minorée par 1.
d. La suite (w_n) est croissante.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.

La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$
b. $f'(x) = (1 + 2x)\mathrm{e}^{x^2}$
c. $f'(x) = (1 + 2x^2)\,\mathrm{e}^{x^2}$
d. $f'(x) = (2 + x^2)\,\mathrm{e}^{x^2}$.

3. Que vaut $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 1}$?

a. -1
b. 0
c. $\frac{1}{2}$
d. $+\infty$.

4. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ telle que

$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$.
b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $h(a) = 1$.
d. L'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

5. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.

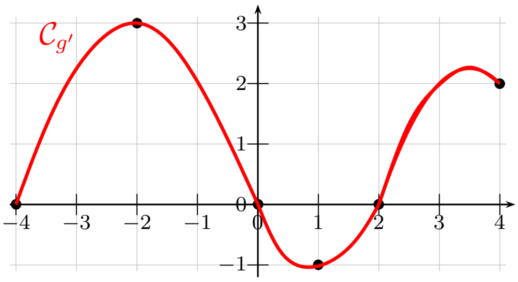
On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.

b. g est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

c. g est convexe sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

d. g admet un minimum en 0.



EXERCICE 2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. **a.** Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.

4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.

On note A un éventuel point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

a. Montrer que a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1) + x^2 = 0$.

On note g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2$.

On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

b. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

c. Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.