SERIE D'EXERCICES
révisions sur les fonctions

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par

$$f(x) = \frac{x+2+\ln x}{x}.$$

La courbe représentative C de la fonction f dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est tracée sur la feuille ci-jointe.

Partie I : Étude de la fonction f

1. Calculer la limite de f en 0^+. Que peut on en déduire ?

2. **a.** Vérifier que pour tout x de $]\,0\,;\,+\infty\,[$,

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}.$$

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c. En déduire l'existence d'une asymptote D à la courbe C. Donner son équation et la tracer sur la feuille ci-jointe.

3. **a.** Prouver que, pour tout x de $]\,0\,;\,+\infty\,[$,

$$f'(x) = \frac{-1-\ln x}{x^2}.$$

b. Montrer que $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en e^{-1}.

c. Établir le tableau de variation de f. Dans ce tableau, on donnera la valeur exacte du maximum de f.

Partie II : Position relative de deux courbes

Soit g la fonction définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par

$$g(x) = 1 + \frac{2}{x}$$

et H la courbe représentative de g dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. **a.** Étudier la fonction g sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ (limites, dérivée, tableau de variation).

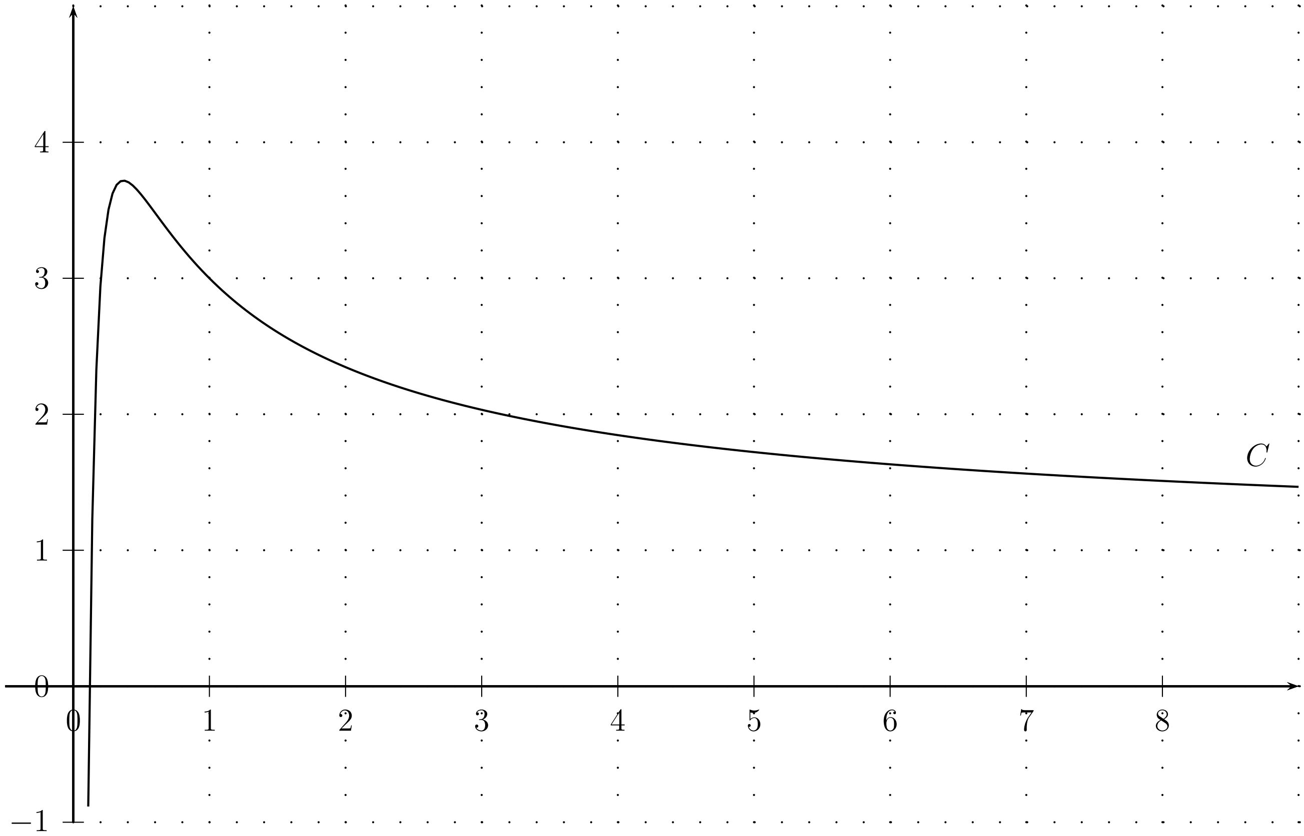
b. Donner les équations des deux asymptotes de la courbe H.

2. **a.** Calculer $f(x) - g(x)$ et étudier son signe.

b. Étudier la position relative des deux courbes C et H.

c. On note K le point d'intersection de C et de H. Quelles sont ces coordonnées exactes ?

3. Placer le point K et construire la courbe H sur la feuille ci-jointe.


4
3
2
1
0
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
C

EXERCICE 2

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$ par

$$g(x) = 1 - \frac{x-1}{e^x}.$$

1. Déterminer la valeur exacte de $g(2)$.

2. Calculer la limite de la fonction g en 1.

3. a. En remarquant que $g(x) = 1 - \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}$, calculer la limite de la fonction g en $+\infty$.

b. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction g, dont on précisera une équation.

4. a. On note g' la fonction dérivée de la fonction g. Montrer que $g'(x) = \dfrac{x-2}{e^x}$.

b. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$.

c. Dresser le tableau de variations de g.

d. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$.

Partie B - Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$ par

$$f(x) = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^2} + \ln(x-1).$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.

1. a. Calculer la limite de la fonction f en 1.
En déduire l'existence d'une asymptote Δ à la courbe $\mathcal{C}$, dont on précisera une équation.

b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.

b. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x-1}$.

c. En déduire le sens de variation de f sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$. Dresser la tableau de variation de f.

3. a. Calculer $f(2)$.

b. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 2. (On donnera les coefficients exacts, puis leur valeur approchée à 0,01 près).

4. a. Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[\,3\,;\,5\,]$.

b. Donner une valeur de α à 10^{-2} près.

Partie C - Représentation graphique

Dans le repère défini précédemment, tracer les droites Δ et T puis la courbe $\mathcal{C}$.