EXERCICE 1 BAC 2024 Septembre Métropole jour 1 [4 points]

Les deux parties sont indépendantes.

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Partie A

Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 2 % des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production. On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres.

On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte.

1. Justifier que la variable aléatoire N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer l'espérance de N et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

3. *On arrondira les résultats à* 10^{-3} *près.*

  a. Calculer la probabilité qu'une boîte contienne exactement trois cachets non conformes.

  b. Calculer la probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes.

4. Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer : « La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5 ».

Combien de cachets une boîte doit-elle contenir au maximum pour respecter ce critère ? Justifier.

Partie B

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i, pour i entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du i-ème cachet prélevé.

On considère la variable aléatoire S définie par :

$$S = M_1 + M_2 + \ldots + M_{100}.$$

On admet que les variables aléatoires $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_{100}$ suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ.

1. Déterminer $E(S)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2. On note s l'écart type de la variable aléatoire S.

Montrer que : $s = 10\sigma$.

3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9.

  a. Montrer que cette condition est équivalente à :

$$P\left(\left|S - 200\right| \geqslant 1\right) \leqslant 0{,}1.$$

  b. En déduire la valeur maximale de σ qui permet, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, d'assurer cette condition.

EXERCICE 2 Amérique du sud novembre jour 1 [6 points]

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches.
L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2, puis on pioche au hasard une boule dans U_2.
On note :

- N_1 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
- N_2 l'évènement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

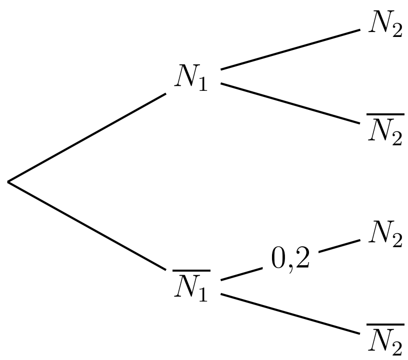
Pour tout évènement A, on note $\overline{A}$ son évènement contraire.

PARTIE A

1. On considère l'arbre de probabilités ci-contre.

a. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est 0,2.

b. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, en faisant apparaître sur chaque branche les probabilités des évènements concernés, sous forme décimale.



2. Calculer la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2.

3. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28.

4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2

Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 . On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-2}.

PARTIE B

n désigne un entier naturel non nul.
L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2, entre chaque expérience.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2.
On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X. Justifier votre réponse.
2. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que : $1 - 0{,}72^n \geqslant 0{,}9$.
3. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'expérience.

PARTIE C

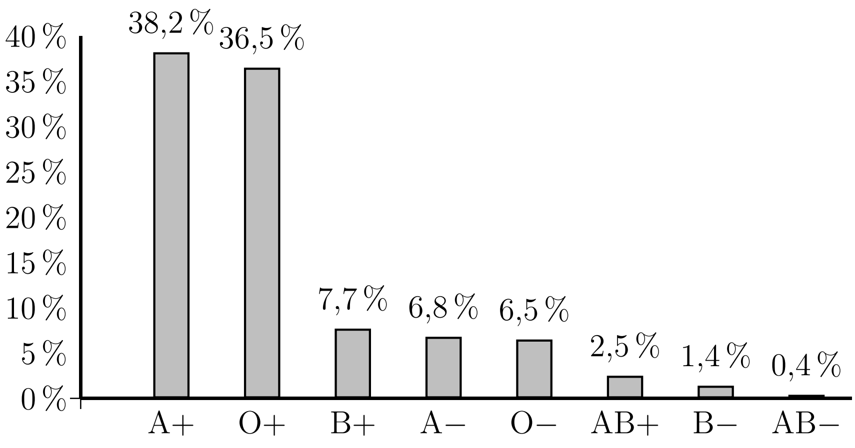
Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2.

On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante :
On pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2, puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire ?
3. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est-elle supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A ? Justifier votre réponse.

   On pourra s'aider d'un arbre pondéré modélisant cette expérience.

EXERCICE 3 Amérique du sud novembre 2024 jour 2 [5 points]
Voici la répartition des principaux groupes sanguins des habitants de France :



Source : https ://fr.statista.com/statistiques/656036/groupes-sanguins-repartition-rh-france/

A+, O+, B+, A−, O−, AB+, B− et AB− sont les différents groupes sanguins combinés aux rhésus.
Par exemple : A + est le groupe sanguin A de rhésus +.
Une expérience aléatoire consiste à choisir une personne au hasard dans la population française et à déterminer son groupe sanguin et son rhésus.
Dans l'exercice, on adopte les notations du type :
$A+$ est l'évènement « la personne est de groupe sanguin A et de rhésus + »
$A-$ est l'évènement « la personne est de groupe sanguin A et de rhésus − »
A est l'évènement « la personne est de groupe sanguin A »

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

On note $Rh+$ l'évènement « La personne est de rhésus positif ».

1. Justifier que la probabilité que la personne choisie soit de rhésus positif est égale à 0,849.

2. Démontrer à l'aide des données de l'énoncé que $P_{Rh+}(A) = 0{,}450$ à 0,001 près.

3. Une personne se souvient que son groupe sanguin est AB mais a oublié son rhésus.
Quelle est la probabilité que son rhésus soit négatif ? Arrondir le résultat à 0,001 près.

Partie 2

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 0,001 près.

Un donneur universel de sang est une personne de groupe sanguin O et de rhésus négatif. On rappelle que 6,5 % de la population française est de groupe O$-$.

1. On considère 50 personnes choisies au hasard dans la population française et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de donneurs universels.

   a. Déterminer la probabilité que 8 personnes soient des donneurs universels. Justifier votre réponse.

   b. On considère la fonction ci-dessous nommée `proba` d'argument k écrite en langage Python.

```
def proba(k) :
    p=0
    for i in range(k+1) :
        p = p + binomiale(i,50,0.065)
    return p
```

   Cette fonction utilise la fonction binomiale d'argument i,n et p, créée pour l'occasion, qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
   Déterminer la valeur numérique renvoyée par la fonction `proba` lorsqu'on saisit `proba(8)` dans la console Python. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Quel est le nombre minimal de personnes à choisir au hasard dans la population française pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel, soit supérieure à 0,999.