Série d'exercices sur la récurrence

EXERCICE 1 Soit U la suite définie par $U_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 6$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n < U_{n+1}$

EXERCICE 2 Soit U la suite définie par $U_0 = 20$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 3$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n > U_{n+1}$

EXERCICE 3 Soit U la suite définie par $U_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$U_{n+1} = \sqrt{2U_n + 3}$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \leqslant U_{n+1}$

EXERCICE 4 Soit U la suite définie par $U_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 6$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n = 18 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

EXERCICE 5 Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$