EXERCICE 1 Savoir si une suite est géométrique.

1. On considère la suite définie par $U(n) = \dfrac{5}{3^n}$, montrer que cette suite est géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
2. Lorsque chaque terme est égale au précédent augmenté de 10%, montrer que la suite est géométrique. Donner sa raison.
3. Lorsque chaque terme est égale au précédent réduit de 2%, montrer que la suite est géométrique. Donner sa raison.

EXERCICE 2 Soit (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_{n+1} = 2U_n - 3$ et $U_0 = 2$
Démontrer par récurrence que $U_n = 3 - 2^n$.

EXERCICE 3 Soit (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + 4$ et $U_0 = 2$
Démontrer par récurrence que (U_n) est croissante.

EXERCICE 4 Soit (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + 4$ et $U_0 = 20$
Démontrer par récurrence que (U_n) est décroissante.

EXERCICE 5 Soit (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + 4$ et $U_0 = 6$
Démontrer par récurrence que (U_n) est constante.

EXERCICE 6 Soit (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{4} + \dfrac{3}{4}$ et $U_0 \in]1; 2]$

— Démontrer par récurrence que (U_n) est minorée par 1.
— Démontrer par récurrence que (U_n) est majorée par 2.
— **En déduire** que (U_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$
 indépendamment du choix de U_0 dans $]1; 2]$.

EXERCICE 7 Soit (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{3U_n + 4}$ et $U_0 = 0$

1. Calculer à 10^{-3} près les 5 premiers termes de la suite.
2. Conjecturer son sens de variation.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

EXERCICE 8 Soit (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_{n+1} = \dfrac{2}{5}U_n + 5$ et $U_0 = 0$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 120$.
2. Que peut-on en conclure à propos de la suite (U_n) ?
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n = \dfrac{25}{3} \times \left(1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right)$.
4. En déduire la limite de (U_n) lorsque n tend vers $+\infty$

EXERCICE 9 Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ où } f(x) = \frac{x+10}{x+4}$$

1. Calculer U_1
2. Démontrer par récurrence que tous les termes U_n sont positifs.

3. Résoudre sur $\mathbb{R}^+$ l'équation $f(x) = x$, on appellera L_2 la solution strictement négative et L_1 l'autre valeur.
4. On définit une nouvelle suite, (V_n) par $V_n = \dfrac{U_n - L_1}{U_n - L_2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   a) Démontrer que la suite (V_n) est géométrique.
   b) En déduire l'expression de V_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   c) A partir de $V_n = \dfrac{U_n - L_1}{U_n - L_2}$ exprimer U_n en fonction de V_n.
   d) En déduire U_n en fonction de n.
   e) Montrer que la suite (U_n) converge vers une valeur que vous déterminerez.

EXERCICE 10 On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},: U_{n+1} = U_n + 2n + 2$$

1. Calculer U_1 et U_2.
2. Démontrer par récurrence que tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n = n^2 + n$.

EXERCICE 11 En utilisant des encadrements, montrer la convergence des suites suivantes puis calculer leurs limites :

1. $U_n = \dfrac{2}{\sqrt{n} + n}$
2. $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
3. $U_n = \dfrac{2}{n + 2 + \cos(n)}$
4. $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$
5. $U_n = \dfrac{n-2}{(n+1)^2}$
6. ** $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$

EXERCICE 12 Minorer le terme général par celui d'une suite plus simple qui tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Conclure.

$U_n = n + (-1)^n$

$U_n = n\cos(n)$

$U_n = \dfrac{n^3 + 5\sin(n)}{n^2}$

$U_n = \dfrac{n^2 + 3}{n}$

$U_n = \dfrac{n^2}{1^2 + 1} + \dfrac{n^2}{2^2 + 1} + \cdots + \dfrac{n^2}{n^2 + 1}$

EXERCICE 13 Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + 4$ et $U_0 = 60$

1. Utiliser le tableur pour calculer les 10 premiers termes de la suites.
2. Quelle conjecture peut on faire sur la limite L de la suite lorsque n tend vers $+\infty$?
3. On forme $V_n = U_n - L$
   a) Utiliser le tableau pour calculer les premiers terme de la suite.
   b) Quelle conjecture peut-on émettre à propos de la nature de la suite (V_n) ?
   c) La démontrer.
   d) En déduire l'expression de V_n puis de U_n en fonction de n
   e) Utiliser le tableur pour vérifier pour les premiers termes.
   f) Déterminer à partir de quel entier n_0, on a $|U_n - L| < 10^{-5}$
      i. A l'aide du tableau
      ii. Par le calcul

EXERCICE 14 On considère la suite (U_n)définie sur $\mathbb{N}$ par : (E) $U_{n+2} = \dfrac{U_{n+1} + 2U_n}{3}$ et $U_0 = 0$ et $U_1 = 3$

1. Utiliser le tableur pour calculer les 10 premiers termes de la suites.
2. Quelle conjecture peut on faire sur la limite L de la suite lorsque n tend vers $+\infty$?
3. a) Montrer que q^n vérifie (E) équivaut à $3q^2 - q - 2 = 0$
   b) En déduire deux suites géométriques vérifiant (E)
   c) On admet alors que $U_n = A \times q_1^2 + B \times q_2^n$. A l'aide des deux premiers termes de (U_n) déterminer les valeurs de A et de B
   d) Donner l'expression de U_n en fonction de n et comparer avec les résultats 1) en utilisant le tableur.
   e) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

EXERCICE 15 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \\ u_{n+1} & = & \left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right) u_n. \end{array}\right.$$

On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = (n+1)u_n$.

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1,000 00	1,000 00
3	1	0,250 00	0,500 00
4	2	0,083 33	0,250 00
5	3	0,031 25	0,125 00
6	4	0,012 50	0,062 50
7	5	0,005 21	0,031 25
8	6	0,002 23	0,015 63
9	7	0,000 98	0,007 81
10	8	0,000 43	0,003 91
11	9	0,000 20	0,001 95

1. La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs des premiers termes des suites (u_n) et (v_n), arrondies au cent-millième.
   Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) ?
2. a) Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.
   b) Démontrer cette conjecture.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 16 On souhaite stériliser une boîte de conserve.
Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25\ ^o$ C et on la place dans un four à température constante $T_F = 100\ ^o$ C.
La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85 ^{o} C.

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes.
On a donc $T_0 = 25$.
Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0{,}85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes.
   Arrondir à l'unité.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$.
3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

EXERCICE 17 On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?
2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	13	24 587	8 192

   Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.
2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

   Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

EXERCICE 18 On définit la suite (U_n) par $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n^3}{1 + U_n^2}$

1. Montrer que la suite (U_n) est strictement positive.
2. Déterminer son sens de variation.
3. En déduire quelle est convergente et donner sa limite.

EXERCICE 19 On considère la suite définie par $U_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$U_{n+1} = \frac{2U_n^2 + 2U_n + 1}{1 + 2U_n}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} \geqslant U_n + \dfrac{1}{2}$
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \geqslant U_0 + \dfrac{n}{2}$
3. Déterminer alors la limite de (U_n).

EXERCICE 20 Déterminer la limite de la suite de terme général $U_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$

EXERCICE 21 On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. Montrer que la suite (S_n) est croissante.
2. Combien de termes sont sommés pour calculer S_n ? Quel est le plus petit d'entre eux ? Le plus grand ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{1}{2}$
4. En déduire que la suite (S_n) ne peut pas être convergente vers un réel ℓ.
5. La suite (S_n) peut-elle être majorée ?
6. Que peut-on dire d'une suite croissante non majorée ?
7. Construire un algorithme permettant de calculer le premier entier n à partir duquel S_n dépasse une valeur M donnée par l'utilisateur.
8. Combien de termes faut-il ajouter pour que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ dépasse 10 ?