LES SUITES NUMÉRIQUES : LE CORRIGÉ

EXERCICE 1 Les limites de suites par le terme dominant.
Dans chacun des cas, déterminer les limites des suites (u_n) en utilisant la méthode du terme dominant.

$$u_n = \frac{2n+1}{n+325} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \times \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{320}{n}} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{2+0}{1+0} = 2$$

$$u_n = \frac{\sqrt{3n+1}}{3+\sqrt{n}} = \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}} \times \frac{\sqrt{3+\frac{1}{n}}}{\frac{3}{\sqrt{n}}+1} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{\sqrt{3}+0}{0+1} = \sqrt{3}$$

$$u_n = \frac{2n^2-3n+2}{1-n} = \frac{2n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}} \times \frac{1-\frac{3}{2n}+\frac{2}{2n^2}}{\frac{1}{n}-1} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} 2n\times(-1) = -\infty$$

$$u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{n^2-n-1}} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \times \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1} = 1$$

$$u_n = \frac{4n^2+1}{n(2n+1)} = \frac{4\cancel{n^2}}{\cancel{n\times n}} \times \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1(2+\frac{1}{n})} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} 4\times\frac{1}{1} = 4$$

$$u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \times \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\text{donc } \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

$$u_n = \frac{3}{2\sqrt{n}+17} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{3}{2+\frac{17}{\sqrt{n}}} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} U_n = 0\times\frac{3}{2+0} = 0$$

$$u_n = \sqrt{n^2+n}-n = (\sqrt{n^2+n}-n) \times \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$= \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \times \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

EXERCICE 2 Les limites de suites par un théorème de comparaison.

• On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{n+1}{2n+\sin(n)}$

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a $\dfrac{1}{2} < u_n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 \leqslant n$ donc on a : $2 \leqslant 2n$ donc $0 < 1 \leqslant 2n-1$

Par ailleurs $-1 \leqslant \sin(n) < 2$ donc $2n-1 \leqslant 2n+\sin(n) < 2n+2$

donc $0 < 2n-1 \leqslant 2n+\sin(n) < 2(n+1)$

donc $\dfrac{1}{2} < \dfrac{n+1}{2n+\sin(n)}$ en divisant par 2 et par $2n+\sin(n)$

2. Démontrer qu'à partir d'un certain rang on a $u_n < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}$

On a $U_n \leqslant \dfrac{n+1}{2n-1}$ car en minorant le dénominateur, on majore la fraction

Par ailleurs $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{n+2}{2n}$

On aura $\dfrac{n+1}{2n-1} < \dfrac{n+2}{2n}$ ssi $2n(n+1) < (2n-1)(n+2)$

ssi $\cancel{2n^2} + 2n < \cancel{2n^2} + 4n - n - 2$

ssi $2 < n$

A partir du rang 3, on a : $U_n = \dfrac{n+1}{2n+\sin(n)} \leqslant \dfrac{n+1}{2n-1} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}$

3. Justifier que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$

D'après le théorème des Gendarmes puisque

pour tout entier $n \geqslant 3$, on a : $\dfrac{1}{2} < U_n < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} \quad = \dfrac{1}{2} = \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}$

On peut affirmer que (U_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$

•• On considère la suite ($\mathrm{u_n}$) définie par : $u_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$

1. Montrer que pour tout $n \in N$ on a, $-1 \leq u_n \leq 3$

Pour tout $n \in N$ on a, $-n \leqslant 0 \leqslant 3n$ donc $\dfrac{-n-1}{n+1} \leqslant U_n \leqslant \dfrac{3n-1+4}{n+1}$

donc $-1 \leq u_n \leq 3$

2. Que peut-on en déduire ?

Que la suite U est bornée, minorée par -1 et majorée par 3

3. Étudier le sens de variation de u_n.

$$U_{n+1}-U_n=\frac{3(n+1)-1}{(n+1)+1}-\frac{3n-1}{n+1} = \frac{(3n+2)(n+1)-(3n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{3n^2+5n+2-3n^2-5n+2}{(n+1)(n+2)} = \frac{4}{(n+1)(n+2)}>0$$

donc la suite U est strictement croissante.

4. Démontrer que pour n suffisamment grand on a : $u_n > 2,999$

On résout l'équation $\dfrac{3n-1}{n+1}>2,999$

C'est à dire $3n-1>2,999n+2,999$ puis $0,001n>3,999$ donc $n>3999$

A partir du terme de rang 4000, on aura $U_n>2,999$

5. Que peut-on en conjecturer ?

La suite est croissante et majorée par 3, elle converge vers un réel L vérifiant $L\leqslant 3$. On conjecture que la suite converge en fait vers 3.

EXERCICE 3 Les limites de suites par le théorème des gendarmes. Pour chacune des suites déterminer par la théorème des gendarmes leurs limites.

$u_n=\dfrac{\cos(n)}{n+1}$ On a : $\dfrac{-1}{n+1}\leqslant U_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$

$u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$ On a : $\dfrac{n-1}{n^2+1}\leqslant U_n\leqslant\dfrac{n+1}{n^2+1}$

$$\text{or } \lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\times\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=0\times1=1$$
$$\text{et } \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\times\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=0\times1=1$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$

$u_n=\dfrac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2}$ On a : $\dfrac{n-1}{1+2}\leqslant U_n\leqslant\dfrac{n+1}{-1+2}$

or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n-1}{3}=+\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=+\infty$

EXERCICE 4 Étude d'une suite. Soit S_n la somme des nombres entiers de 1 à n tel que :

$$S_n=1+2+3+\cdots+n$$

Soit $\mathrm{C_n}$ la somme des cubes des nombres entiers de 1 à n tel que :

$$C_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

1. Calculer S_n et C_n lorsque $n=1,2,3,4,5$. Que pouvons-nous conjecturer ?

n	S_n	C_n
1	1	1
2	3	9
3	6	36
4	10	100
5	15	225

il semble que $C_n = S_n^2$

2. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 1, C_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

☐ Soit H_n la proposition "$C_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$"

☐ Pour $n = 1$, on a : $C_1 = 1$ et $\dfrac{1^2 \times 2^2}{4} = 1$ donc H_1 est vraie.

☐ Soit n un entier naturel non nul pour lequel H_n est vraie

pour cet entier n, on a : $C_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

or $C_{n+1} = C_n + (n+1)^3$

donc $C_{n+1} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \dfrac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1)}{4}$

donc $C_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2)}{4}$

donc H_{n+1} est vraie.

☐ H_1 est vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si H_n est vraie alors H_{n+1} aussi
donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est vraie
C'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $C_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

EXERCICE 5 Étude d'une suite. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n, $\quad 3u_{n+1} = u_n + \dfrac{4}{3}$.

1. Calculer u_1 et u_2. $u_1 = \dfrac{1}{3}u_0 + \dfrac{4}{3} = 3$ puis $u_2 = \dfrac{1}{3}u_1 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{7}{3} \approx 2,33$

2. Démontrer que, pour tout entier n, $u_n \geq 2$.

☐ Soit H_n la proposition "$u_n \geq 2$"

☐ Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 5$ donc H_0 est vraie.

☐ Soit n un entier naturel pour lequel H_n est vraie

pour cet entier n, on a : $u_n \geqslant 2$

donc $\dfrac{1}{3}u_n \geqslant \dfrac{2}{3}$

puis $\dfrac{1}{3}u_n + 4 \geqslant \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3}$

c'est à dire $u_{n+1} \geqslant 2$

donc H_{n+1} est vraie.

☐ H_1 est vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si H_n est vraie alors H_{n+1} aussi
donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie
C'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geqslant 2$

3. Montrer que (u_n) est une suite décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}(u_n - 2)$

or $u_n \geqslant 2$ donc $u_n - 2 \geqslant 0$ et $-\frac{2}{3} < 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ donc $u_{n+1} \leqslant u_n$

la suite est donc décroissante.

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Puisque la suite est décroissante et minorée par 2,

elle converge vers une valeur L qui vérifie $L \geqslant 2$

D'après le théorème des suites monotones bornées, L vérifie $L = \frac{1}{3}L + \frac{4}{3}$

C'est à dire $\frac{2}{3}L = \frac{4}{3}$ donc $L = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = 2$

5. On pose pour tout entier n, $v_n = u_n - 2$.

Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} - 2 = \frac{1}{3}(v_n + 2) - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}v_n$

donc la suite (v_n) es géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$. Par ailleurs $v_0 = u_0 - 2 = 5 - 2 = 3$

On a donc $v_n = 3 \times \frac{1}{3^n}$

6. Soit les deux suites :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Déterminer l'expression de S_n et de T_n en fonction de n.

D'après le cours, puisque v est une suite géométrique de premier terme 3 et de raison $\frac{1}{3}$,

on a : $S_n = 3 \times \frac{1 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$

$T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 2 + v_k = 2 \times (n+1) + \frac{9}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$

7. Déterminer les limites des deux suites ci-dessus.

Puisque $q = \frac{1}{3}$ vérifie $-1 < q < 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = 0$

Par ailleurs : $\lim_{n \to +\infty} n + 1 = +\infty$

On a donc $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{9}{2}$ et $\lim_{n \to +\infty} T_n = +\infty$