LES SUITES NUMÉRIQUES

EXERCICE 1 Les limites de suites par le terme dominant.
Dans chacun des cas, déterminer les limites des suites (u_n) en utilisant la méthode du terme dominant.

$$u_n = \frac{2n+1}{n+325} \qquad u_n = \frac{\sqrt{3n+1}}{3+\sqrt{n}}$$

$$u_n = \frac{2n^2-3n+2}{1-n} \qquad u_n = \frac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{n^2-n-1}}$$

$$u_n = \frac{4n^2+1}{n(2n+1)} \qquad u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$u_n = \frac{3}{2\sqrt{n}+17} \qquad u_n = \sqrt{n^2+n}-n$$

EXERCICE 2 Les limites de suites par un théorème de comparaison.

• On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{n+1}{2n+\sin(n)}$

1. Démontrer que pour tout $n \geq 1$ on a $\dfrac{1}{2} < u_n$

2. Démontrer qu'à partir d'un certain rang on a $u_n < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}$

3. Justifier que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$

•• On considère la suite ($\mathrm{u_n}$) définie par : $u_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$

1. Montrer que pour tout $n \in N$ on a, $-1 \leq u_n \leq 3$

2. Que peut-on en déduire ?

3. Étudier le sens de variation de u_n.

4. Démontrer que pour n suffisamment grand on a : $u_n > 2,999$

5. Que peut-on en conjecturer ?

EXERCICE 3 Les limites de suites par le théorème des gendarmes. Pour chacune des suites déterminer par la théorème des gendarmes leurs limites.

$$u_n = \frac{\cos(n)}{n+1} \qquad u_n = \frac{n+(-1)^n}{n^2+1} \qquad u_n = \frac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2}$$

EXERCICE 4 Étude d'une suite. Soit S_n la somme des nombres entiers de 1 à n tel que :

$$S_n = 1+2+3+\cdots+n$$

Soit $\mathrm{C_n}$ la somme des cubes des nombres entiers de 1 à n tel que :

$$C_n = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$$

1. Calculer S_n et C_n lorsque $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Que pouvons-nous conjecturer ?
2. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 1, C_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

EXERCICE 5 Étude d'une suite. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n, $\quad 3u_{n+1} = u_n + 4$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer que, pour tout entier n, $u_n \geq 2$.
3. Montrer que (u_n) est une suite décroissante.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
5. On pose pour tout entier n, $v_n = u_n - 2$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

6. Soit les deux suites :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

   Déterminer l'expression de S_n et de T_n en fonction de n.

7. Déterminer les limites des deux suites ci-dessus.