EXERCICE 1

Soit (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_{n+1} = \dfrac{2}{3}U_n + 5$ et $U_0 = 0$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 15$.
2. Que peut-on en conclure à propos de la suite (U_n) ?
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n = 15 \times \left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$.
4. En déduire la limite de (U_n) lorsque n tend vers $+\infty$

EXERCICE 2

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, : U_{n+1} = U_n + 2n + 2$$

1. Calculer U_1 et U_2.
2. Démontrer par récurrence que tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n = n^2 + n$.

EXERCICE 3

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = \tfrac{1}{2} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, : U_{n+1} = \frac{2}{3 - U_n}$$

1. Ecrire un algorithme qui permet de d'afficher les valeurs U_1 , U_2 , $\cdots$, U_N lorsqu'on lui fourni la valeur de l'entier N.
2. Calculer U_n pour $1 \leqslant n \leqslant 6$.
3. En déduire une conjecture sur le sens de variation de la suite (U_n).
4. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 1)(U_n - 2)}{3 - U_n}$.
5. En déduire le sens de variation de la suite (U_n).

EXERCICE 4

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2u_n + 6$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 9 \times 2^n - 6$
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, u_n est divisible par 6.

EXERCICE 5

Soit (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{3U_n + 4}$ et $U_0 = 0$

1. Calculer à 10^{-3} près les 5 premiers termes de la suite.
2. Conjecturer son sens de variation.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

EXERCICE 6

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ où } f(x) = \frac{x+10}{x+4}$$

1. Calculer U_1
2. Démontrer par récurrence que tous les termes U_n sont positifs.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}^+$ l'équation $f(x) = x$, on appellera L_2 la solution strictement négative et L_1 l'autre valeur.
4. On définit une nouvelle suite, (V_n) par $V_n = \dfrac{U_n - L_1}{U_n - L_2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   - **a.** Démontrer que la suite (V_n) est géométrique.
   - **b.** En déduire l'expression de V_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - **c.** A partir de $V_n = \dfrac{U_n - L_1}{U_n - L_2}$ exprimer U_n en fonction de V_n.
   - **d.** En déduire U_n en fonction de n.
   - **e.** Montrer que la suite (U_n) converge vers une valeur que vous déterminerez.

EXERCICE 7

Lorsque cela est possible, déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants

$$U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$U_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$U_n = (-1)^n$$

$$U_n = (1,000000002)^n$$

$$U_n = \frac{4}{3^n}$$

$$U_n = \frac{2^{3n}}{7^n}$$

$$U_n = \frac{(-3)^{3n}}{2^{5n}}$$

$$U_n = 8 \times \frac{(-3)^n}{4^n}$$

$$U_n = 8 \times \frac{(4)^n}{3^n}$$

$$U_n = \frac{1}{5^n} + \frac{1}{2^n}$$

$U_n = 2 + \dfrac{1}{8^n}$

$U_n = 8^n - 10^9$

$U_n = 3^n \times \left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$

$U_n = 3^n - 2^n$

$U_n = 2^n - 3^n$

EXERCICE 8 Minorer le terme général par celui d'une suite plus simple qui tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Conclure.

$U_n = n + (-1)^n$

$U_n = n\cos(n)$

$U_n = \dfrac{n^3 + 5\sin(n)}{n^2}$

$U_n = \dfrac{n^2+3}{n}$

$U_n = \dfrac{n^2+3}{n+1}$

$U_n = \dfrac{n^2}{1^2+1} + \dfrac{n^2}{2^2+1} + \cdots + \dfrac{n^2}{n^2+1}$

EXERCICE 9 En utilisant des encadrements, montrer la convergence des suites suivantes puis calculer leurs limites :

1. $U_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}+n}$
2. $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
3. $U_n = \dfrac{2}{n+2+\cos(n)}$
4. $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ $\qquad n \in \mathbb{N}^*$
5. $U_n = \dfrac{n-2}{(n+1)^2}$
6. ** $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ $\qquad n \in \mathbb{N}^*$

EXERCICE 10 On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \\ u_{n+1} & = & \left(\dfrac{n+1}{2n+4}\right) u_n. \end{cases}$$

On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = (n+1)u_n$.

1. La feuille de calcul ci-contre présente les valeurs des premiers termes des suites (u_n) et (v_n), arrondies au cent-millième.

   Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) ?

2. **a.** Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n.

   b. Démontrer cette conjecture.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	1,000 00	1,000 00
3	1	0,250 00	0,500 00
4	2	0,083 33	0,250 00
5	3	0,031 25	0,125 00
6	4	0,012 50	0,062 50
7	5	0,005 21	0,031 25
8	6	0,002 23	0,015 63
9	7	0,000 98	0,007 81
10	8	0,000 43	0,003 91
11	9	0,000 20	0,001 95

EXERCICE 11 On souhaite stériliser une boîte de conserve.
Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25\,°\text{C}$ et on la place dans un four à température constante $T_F = 100\,°\text{C}$.
La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85 °C.

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.
Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes.

   Arrondir à l'unité.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.

3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?