

VARIABLES ALÉATOIRES – FEUILLE D'EXERCICES



Besoin d'un point sur le cours ? Les **Formats Cours** t'attendent sur WWW.MATHSENTETE.FR ou sur
Les **corrigés des exercices** seront à retrouver sur le Padlet 1ère [HTTPS://PADLET.COM/MATHSENTETE](https://PADLET.COM/MATHSENTETE)



🔴 VARIABLES ALÉATOIRES ET LOI DE PROBABILITÉ

Exercice 1 : on lance trois fois de suite une pièce de monnaie.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où Face est sorti sur les trois lancers.

Définir les univers Ω et $X(\Omega)$.

Exercice A : « Loi de probabilité de gain algébrique »

On lance un dé équilibré comportant 6 faces.

Si la face indique un nombre impair, on perd 3 € ;

sinon, on gagne la valeur en euros du numéro de la face.



Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

donnant le gain algébrique à ce jeu pour modéliser cette situation.

Exercice 2 : dans un restaurant d'entreprise, le consommateur a le choix entre : trois entrées à 2, 3 et 4 €, trois plats principaux à 5, 6 et 7 €, et deux desserts à 3 € chacun.

Un consommateur choisit au hasard une entrée, un plat et un dessert.

On note X la variable aléatoire donnant le prix de son repas.

- 1) Quelles sont les valeurs prises par X ?
- 2) Quelles sont les issues correspondant à $X = 12$?

Exercice 3 : une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On en tire trois successivement et sans remise.

- 1) Donner l'univers associé à cette expérience.
- 2) On s'intéresse à la somme S des trois numéros sortis.

A l'aide d'un arbre, déterminer les valeurs possibles pour S et indiquer à chaque fois le nombre de trajets y conduisant.

- 3) En déduire la loi de probabilité de S .

Exercice 4 : la loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x_i	0	2	3	5	7
$p(X = x_i)$	0,1	0,15	0,16	0,45	0,14

Déterminer les probabilités suivantes :

- | | | |
|------------------|------------------|-------------------|
| a) $p(X = 5)$ | b) $p(X \leq 5)$ | c) $p(X > 5)$ |
| d) $p(X \geq 2)$ | e) $p(X = 0)$ | f) $p(0 < X < 5)$ |

Exercice 5 : la loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous :

Valeurs x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = x_i)$	0,10	0,05	0,15	0,05	0,10	0,20	0,10	0,10	a

1. Déterminer la valeur de a .
2. a) Calculer $p(X > 3)$.
b) Calculer $p(X \leq 3)$.

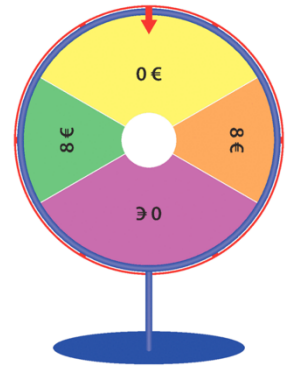
➡ ESPERANCE, VARIANCE & ECART-TYPE

Exercice 6 : dans une fête, on propose à Léonard de miser 5 € puis de tourner deux fois une roue.

Il gagne les sommes indiquées à chacun des deux tours de roue.

Les secteurs « 0 € » ont pour angle 120° , les secteurs « 8 € » ont pour angle 60° et la probabilité de tomber sur un secteur est proportionnelle à l'angle formé par ce secteur.

1. Modéliser cette situation à l'aide d'une variable aléatoire X donnant le gain algébrique de Léonard.
2. Quelle est la probabilité que Léonard gagne de l'argent ?



Exercice 7 : une loterie est constituée de 1000 billets vendus 1 € chacun. Un billet gagne 400 €, deux billets gagnent chacun 100 € et dix billets gagnent chacun 10 €.

1. Un joueur achète un billet. On appelle G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.
 - a) Quelle est la loi de probabilité de G ?
 - b) Calculer $E(G)$.
 - c) Le jeu rapporte-t-il à l'organisateur de la loterie ou bien aux joueurs ?
2. Pour être sûre de gagner, une personne achète tous les billets. Elle gagne donc tous les lots.
 - a) Quelle somme débourse-t-elle ?
 - b) Quelle somme correspond au gain de tous les lots ?
 - c) Quelle somme la personne a-t-elle perdue ?
 - d) Quelle est la perte moyenne par billet acheté ?
 - e) Comparer ce résultat avec l'espérance mathématique trouvée à la question 1. c).

Exercice 8 : une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On tire au hasard une boule, on note le numéro, on replace cette boule, on tire une deuxième boule et on fait la somme X des nombres inscrits sur les boules tirées.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2) Si je gagne la valeur de X , combien puis-je espérer gagner ?

Exercice 9 : X est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs -3 ; 4 ; 10 et 30 . Son espérance est égale à 5.

On considère les variables Y et Z telles que $Y = 3X$ et $Z = X + 10$.

1. Déterminer les valeurs que peuvent prendre Y et Z .
2. Déterminer $E(Y)$ et $E(Z)$.

Exercice B : « Espérance, variance et écart-type »

Pour chacune des variables aléatoires suivantes dont on donne la loi de probabilité à l'aide d'un tableau, déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type.

On détaillera les calculs, mais on pourra vérifier les résultats à la calculatrice.

Si besoin, on arrondira les résultats à 0,01 près.

x_i	-4	0	9	25
$p(X = x_i)$	0,50	0,20	0,20	0,10

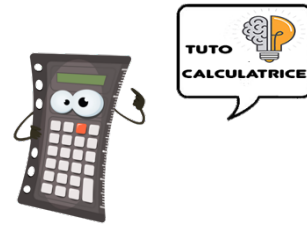
y_i	-25	-3	5	100
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0,3	0,2

z_i	-5	0	4	10
$p(Z = z_i)$	0,42	0,38	0,15	0,05



Exercice 10 : une roue est partagée en 10 secteurs angulaires égaux dont 5 colorés en rouge, 3 en vert et 2 en jaune. On tourne la roue et elle s'arrête au hasard sur un secteur angulaire : si celui-ci est vert, on gagne 5 € et s'il est rouge, on perd 4 €. X est la variable aléatoire donnant le gain (algébrique) de ce jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ à l'aide des formules du cours.
3. Interpréter la valeur de $E(X)$.
4. Vérifier les résultats de la questions 2. en utilisant la calculatrice.



Exercice 11 :

1. Au jeu de la Boule, on peut miser sur un numéro parmi les neuf numéros 1 à 9 du tapis de jeu. Si la boule lancée par le croupier s'arrête dans le godet portant le numéro misé, on récupère la mise et on gagne sept fois celle-ci. Sinon, le casino garde la mise.

On suppose que les neuf résultats sont équiprobables.

Un joueur mise un jeton sur le numéro 1. On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique de ce joueur.

- a) Quelle est la loi de probabilité de X ?
 - b) Calculer $E(X)$?
2. On peut aussi miser sur « pair » ou sur « impair ». Si l'on mise sur « pair », on gagne si la boule s'arrête sur le 2, le 4, le 6 ou le 8. Si l'on mise sur « impair », on gagne si la boule s'arrête sur le 1, le 3, le 7 ou le 9 (le 5, bien qu'impair, ne permet pas de gagner). Si l'on gagne, on remporte une fois sa mise et on récupère celle-ci. Sinon, le casino garde la mise. Un joueur mise un jeton sur « pair ». On note Y la variable aléatoire donnant le gain algébrique de ce joueur.
 - a) Quelle est la loi de probabilité de Y ?
 - b) Calculer $E(Y)$.
 3. Comparer $E(X)$ et $E(Y)$. Quel commentaire pouvez-vous faire ?

Exercice C : « Arbre pondéré et variable aléatoire ».

Sur la planète Dictat, le gouvernement met en œuvre une politique nataliste. Toute famille doit avoir au moins un enfant, au plus trois enfants et au plus un garçon. Dès que l'on a un garçon, on n'a pas d'autre enfant. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'enfants d'une famille. On suppose l'équiprobabilité des garçons et des filles à la naissance.

- 1) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 2) Calculer $E(X)$.



Exercice 12 : une personne propose un jeu d'argent avec un dé truqué selon les caractéristiques ci-dessous.

Numéro	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$

La partie coûte 5 €. Le joueur gagne 50 € s'il obtient le 6, 20 € s'il obtient le 5 ou le 4, 10 € s'il obtient le 3 et perd sinon.

A-t-on intérêt à jouer à ce jeu ?

♥	♦	♠	♣
As	As	As	As
R	R	R	R
D	D	D	D
V	V	V	V
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7

Exercice 13 : dans un jeu de 32 cartes, on choisit une carte au hasard. Si la carte choisie est un as, alors on gagne 10 points, si la carte choisie est une figure (valet, dame ou roi) alors on gagne 3 points et sinon on perd 5 points. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de points sur une partie. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 14 : un jeu est organisé de la façon suivante : on répond à deux questions notées A et B.

Pour la question A, les réponses possibles sont 1, 2 ou 3 et seule la réponse 2 est exacte.

Pour la question B, les réponses possibles sont 1, 2, 3, 4 ou 5 et seule la réponse 4 est exacte.

Si la réponse à la question A est différente de 2, alors le joueur est éliminé, si elle est égale à 2, alors le joueur gagne 5€ et on regarde la réponse à la question B. Si cette dernière est égale à 4, alors il gagne 5€ de plus.

Cyprien répond au hasard, de façon indépendante, à chacune des questions, sans savoir que (2 ; 4) est le bon couple de réponses.

- 1) Compléter le tableau suivant en indiquant dans chaque cas le gain correspondant aux réponses données.

$A \backslash B$	1	2	3	4	5
1					
2					
3					

- 2) On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain correspondant.
Donner la loi de probabilité de X .
- 3) Calculer son espérance mathématique.
- 4) Cyprien a-t-il intérêt à jouer souvent si sa mise est de 1€ ?

Exercice D : « Jeu équitable ? »

Un jeu est organisé de la manière suivante : le joueur mise 3 € puis fait tourner une roue partagée en 6 secteurs circulaires. Lorsque la roue s'immobilise, un repère situé devant la roue indique le secteur circulaire désigné.

On suppose que la roue est lancée suffisamment vite pour que la position du repère corresponde à un tirage aléatoire et la probabilité que le repère indique un secteur donné est donc proportionnelle à l'angle au centre de ce secteur.

Sur chacun des secteurs circulaires est affichée une somme que le joueur reçoit :

- le secteur 1 mesure 150° et affiche 0 €
- le secteur 2 mesure 100° et affiche 3 €
- le secteur 3 mesure 50° et affiche 4 €
- le secteur 4 mesure 30° et affiche 6 €
- le secteur 5 mesure 20° et affiche 10 €
- le secteur 6 mesure 10° et affiche 15 €.

On appelle gain du joueur la somme, positive ou négative, que le joueur obtient après le lancer de la roue : cette somme prend en compte la mise de 3€ (par exemple, le gain correspondant au secteur 5 est égal à 7 €).

On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain du joueur. Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable X .
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un gain d'au moins 3 € ?
3. a) Calculer l'espérance mathématique de la variable X .
b) Le jeu est-il équitable ?
4. Dans cette question, les cinq premiers secteurs sont inchangés, mais le sixième affiche une somme de a € où a est un nombre réel positif. On note encore X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain du joueur.
 - a) Calculer l'espérance mathématique de la variable X en fonction du réel a .
 - b) Déterminer la valeur de a pour que cette espérance soit nulle.



Exercice 15 : un jeu consiste à lancer deux dés tétraédriques dont les faces sont numérotées de 1 à 4.

Après le lancer, on fait la somme des numéros des faces. La mise de départ est m € (m étant un nombre réel positif). Puis :

- On gagne 10 € si on obtient un résultat supérieur ou égal à 6 ;
- On gagne 20 € si on obtient un résultat strictement inférieur à 4.
- On ne gagne rien sinon.

1. Pour cette question, on prend $m = 5$.

X est la variable aléatoire donnant le gain algébrique du jeu.

- a) Déterminer la loi de probabilité de X .
- b) Déterminer $E(X)$. Ce jeu est-il à l'avantage du joueur ou de l'organisateur ?

2. Pour quelle valeur de m le jeu est-il équitable ?

