Le calcul des limites obéit aux règles de calcul sur les réels avec les conventions suivantes :

$$\frac{1}{0_+} = +\infty \text{ et } \frac{1}{0_-} = -\infty$$

où 0_+ signifie 0 obtenu par des valeurs positives et 0_- signifie 0 obtenu par des valeurs négatives.

Néanmoins dans 4 cas on ne peut pas conclure directement.

1. Premier cas.

a. Soit $f(x) = x + 2$ et $g(x) = x$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

Or, <u>ici</u> $f(x) - g(x) =$ et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - g(x) =$

Peut-on dire que $\infty - \infty$ est égal à 0 ?

b. Soit $f(x) = x + 5$ et $g(x) = x$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

Or, <u>ici</u> $f(x) - g(x) =$ et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - g(x) =$

Peut-on dire que $\infty - \infty$ est égal à 5 ?

c. Soit $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = x$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

Or, <u>ici</u> $f(x) - g(x) =$ et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - g(x) =$

Peut-on dire que $\infty - \infty$ a toujours le même résultat ?

Expliquer pourquoi on dit que $\infty - \infty$ est une FORME INDÉTERMINÉE

2. Second cas.

a. Soit $f(x) = 3x$ et $g(x) = x$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

Or, <u>ici</u> $\dfrac{f(x)}{g(x)} =$ et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

Peut-on dire que $\dfrac{\infty}{\infty}$ est égal à 1 ?

b. Soit $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

Or, <u>ici</u> $\dfrac{f(x)}{g(x)} =$ et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

Peut-on dire que $\dfrac{\infty}{\infty}$ est égal à 0 ?

c. Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

Or, <u>ici</u> $\dfrac{f(x)}{g(x)} =$ et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

Peut-on dire que $\dfrac{\infty}{\infty}$ a toujours le même résultat ?

Expliquer pourquoi on dit que $\dfrac{\infty}{\infty}$ est une FORME INDÉTERMINÉE

3. Troisième cas.

a. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

Or, <u>ici</u> $f(x) \times g(x) =$ et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \times g(x) =$

Peut-on dire que $0 \times \infty$ est égal à 0 ?

b. Soit $f(x) = \dfrac{5}{x}$ et $g(x) = x$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

Or, <u>ici</u> $f(x) \times g(x) =$ et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \times g(x) =$

Peut-on dire que $0 \times \infty$ est égal à 5 ?

c. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x^2$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

Or, <u>ici</u> $f(x) \times g(x) =$ et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \times g(x) =$

Peut-on dire que $0 \times \infty$ a toujours le même résultat ?

Expliquer pourquoi on dit que $0 \times \infty$ est une FORME INDÉTERMINÉE

4. Quatrième cas.

a. Soit $f(x) = \dfrac{2024}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

Or, <u>ici</u> $\dfrac{f(x)}{g(x)} =$ et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

Peut-on dire que $\dfrac{0}{0}$ est égal à 1 ?

b. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

Or, <u>ici</u> $\dfrac{f(x)}{g(x)} =$ et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

Peut-on dire que $\dfrac{0}{0}$ est égal à $+\infty$?

c. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$

Or, <u>ici</u> $\dfrac{f(x)}{g(x)} =$ et on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$

Peut-on dire que $\dfrac{0}{0}$ a toujours le même résultat ?

Expliquer pourquoi on dit que $\dfrac{0}{0}$ est une FORME INDÉTERMINÉE

5. Résumons

Quelles sont les 4 formes indéterminées ?

Pourquoi leur donne-t-on ce nom ?

6. Méthodes pour lever les indéterminations

a. Factoriser par les quantités prédominantes

Exemple : déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-2}{5x+1}$

On obtient a priori la forme indéterminée :

MAIS si on factorise au numérateur et au dénominateur par x et que l'on simplifie, on obtient :

$$\frac{3x-2}{5x+1} = \frac{x\times\Big(\qquad\qquad\Big)}{x\times\Big(\qquad\qquad\Big)} = \frac{\qquad}{\qquad}$$

On peut alors conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-2}{5x+1} =$

Réaliser un raisonnement analogue pour obtenir $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-2}{5x+1} =$

Exemple : déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-5x+7$

On obtient a priori la forme indéterminée :

MAIS si on factorise par x^2, on obtient $x^2-5x+7 = x^2\times\Big(\qquad\qquad\qquad\Big)$

On peut alors conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-5x+7 =$

b. Utiliser les croissances comparées

Exemple : déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+3)e^{-x}$

On obtient a priori la forme indéterminée :

MAIS si on développe, on obtient $(2x+3)e^{-x} =$

or on a montré dans le cours que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} =$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} =$

On peut alors conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x+3)e^{-x} =$

c. Utiliser les quantités conjuguées

Exemple : déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

On obtient a priori la forme indéterminée :

MAIS si on utilise la forme conjuguée de $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ qui est $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$, on peut écrire :

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\times\frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad}$$

On peut alors conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x} =$

d. Utiliser des factorisations

Lorsque la limite à étudier est en un point a et que la forme indéterminée est $\frac{0}{0}$, on peut tenter de factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x-a)$ puis de simplifier l'expression obtenue.

Exemple : déterminer $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

On obtient a priori la forme indéterminée :

MAIS si on factorise par $(x-(-1))$, on obtient : $\frac{x^2-1}{x+1} = \underline{\qquad\qquad} =$

On peut alors conclure que $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} =$

EXERCICES

Déterminez les limites aux bornes des ensembles de définitions des fonctions suivantes :

Exercice 1 : $f(x) = x^2 + 3x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 : $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$ définie sur $[2; +\infty[$

Exercice 3 : $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$ définie sur $]3; 4[\cup]4; +\infty[$

Montrez que les courbes des fonctions suivantes admettent deux asymptotes dont vous préciserez les équations.

Exercice 4 : $f(x) = \frac{x+1}{1-2x}$ définie sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

Exercice 5 : $f(x) = \frac{x^2+3x+4}{x+2}$ définie sur $]-2; +\infty[$
on déterminera préalablement les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$