SANS CALCULATRICE

Minitest $\longrightarrow$ Corrigé

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 20$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 3$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.

   $u_1 = \frac{49}{3} \approx 16,3, \quad u_2 = \frac{125}{9} \approx 13,9, \quad u_3 = \frac{331}{27} \approx 12,3, \quad u_4 = \frac{905}{81} \approx 11,2$

2. Quelles conjectures peut-on observer à propos du sens de variation de u ainsi que d'un éventuel minorant ?

   La suite semble décroissante et minorée par 0

3. On souhaite démontrer celles-ci par récurrence. Compléter les cases laissées éventuellement vides :

   Définition : pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit H_n la proposition : " $\boxed{0 \leqslant u_{n+1} < u_n}$ "

   Initialisation : pour l'entier $n = 0$, on a : $\boxed{u_1 = \frac{49}{3} \text{ et } u_0 = 20}$

   donc $\boxed{0 \leqslant u_1 < u_0}$

   la proposition H est vraie au rang 0

   Hérédité : Soit n un entier supérieur ou égal à 0, pour lequel on suppose que la proposition H est vraie

   pour cet entier on a donc $\boxed{0 \leqslant u_{n+1} < u_n}$

   donc $\boxed{0 \leqslant \frac{2}{3}u_{n+1} < \frac{2}{3}u_n}$ en multipliant tous les termes par $\boxed{\frac{2}{3}}$

   donc $\boxed{3 \leqslant \frac{2}{3}u_{n+1} + 3 < \frac{2}{3}u_n + 3}$ en $\boxed{\text{ajoutant 3 partout}}$

   c'est à dire $\boxed{0 < 3 \leqslant u_{n+2} < u_{n+1}}$

   donc la proposition H est vraie au rang $n + 1$

   Conclusion : on sait que H est vraie pour l'entier initial 0

   et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si la proposition est vraie au rang $\boxed{n}$ alors on a démontré qu'elle

   était encore vraie au rang $\boxed{n+1}$

   donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition H est vraie.

   C'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\boxed{0 \leqslant u_{n+1} < u_n}$

   On peut donc conclure que la suite u est $\boxed{\text{décroissante et minorée par 0cm}}$