SANS CALCULATRICE

Minitest N°03 ⟶ Corrigé

Quelle est l'originale de la fonction définie par $F(p) = \frac{1}{p}(1 - e^{-3p}) + \frac{2}{p^2} + \frac{3}{p^2+16} + \frac{4p}{p^2+9}$?

$$f(t) = U(t) - U(t-3) \quad + \quad 2t\,U(t) \quad + \quad \frac{3}{4}\sin(4t)U(t) \quad + \quad 4\cos(3t)U(t)$$

On souhaite résoudre $y' + 3y = 4U(t)$ sachant que $y(0) = 2$ en utilisant la transformée de Laplace.
Compléter le raisonnement suivant :

Transformons en Laplace, on obtient : $pY - 2 + 3Y = .\frac{4}{p}.....$

Puis : $(p+3)Y = .2 + \frac{4}{p}..$

Enfin : $Y = \frac{2}{p+3} + .\frac{4}{p(p+3)}......$

Décomposons en éléments simples ce qui doit l'être : $\frac{4}{p\,(p+3)}$

On note : $G(p) = \frac{4}{p\,(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3}$

Pour trouver A, on calcule $\lim\limits_{p \to 0} p \times G(p) = \frac{4}{0+3} = A + 0$ donc $A = \frac{4}{3}.....$

Pour trouver B, on calcule $\lim\limits_{p \to -3} (p+3) \times G(p) = .\frac{4}{-3}.... = 0 + B$ donc $B = .\frac{-4}{3}...$

On a donc $G(p) = .\frac{4}{3} \times \frac{1}{p} - \frac{4}{3} \times \frac{1}{p+3}...$

Puis $Y(p) = \frac{2}{p+3} + ...\frac{4}{3} \times \frac{1}{p} - \frac{4}{3}\frac{1}{p+3}...$

On peut alors reconnaitre les originaux :

$y(t) = 2 \times ..e^{-3t}\,U(t)... + ..\frac{4}{3}U(t)... - ..\frac{4}{3}e^{-3t}\,U(t)...$

C'est à dire $\boxed{y(t) = \left(\frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{4}{3}\right)U(t)}$ en regroupant les termes.