Minitest ⟶ Corrigé

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 20$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$

Démontrer par récurrence que la suite est décroissante et minorée

☐ Soit H_n la proposition "$0 \leqslant u_{n+1} < u_n$"

☐ Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 20$ et $u_1 = 8$ donc $0 \leqslant u_1 < u_0$ donc H_0 est vraie.

☐ Soit n un entier naturel pour lequel H_n est vraie

pour cet entier n, on a : $0 \leqslant u_{n+1} < u_n$

donc $0 \leqslant 3 \times u_{n+1} < 3 \times u_n$ en multipliant chaque terme par 3

donc $0 \leqslant 3 \times u_{n+1} + 4 < 3 \times u_n + 4$ en ajoutant 4 à chaque terme

donc $0 \leqslant \sqrt{3 \times u_{n+1} + 4} < \sqrt{3 \times u_n + 4}$ car $\sqrt{\ }$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$

donc $0 \leqslant u_{n+2} < u_{n+1}$

donc H_{n+1} est vraie.

☐ H_0 est vraie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si H_n est vraie alors H_{n+1} aussi

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie

C'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leqslant u_{n+1} < u_n$

donc (u_n) est décroissante et minorée par 0

- Citer les quatre formes indéterminées sur les limites

$\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \dfrac{0}{0} \qquad \dfrac{\infty}{\infty}$

- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n^2 - 100n + 1$ en justifiant.

$3n^2 - 100n + 1 = n^2 \times \left(3 - \dfrac{100}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$

or $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} = \dfrac{100}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc par combinaison linéaire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 - \dfrac{100}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = 3 - 0 + 0 = 3$

puis par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \times \left(3 - \dfrac{100}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty$

C'est à dire $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n^2 - 100n + 1 = +\infty$