On considère l'équation différentielle $y' + 5y = 12$ et la condition initiale $y(0) = 8$

Étape 1 Résolution de l'équation homogène associée $y' + 5y = 0$, notée (H)

$y' + 5y = 0$ équivaut à, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $y'e^{5x} + y5e^{5x} = 0$ $\times$ tout par : e^{5x}

équivaut à, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $y'e^{5x} + y(e^{5x})' = 0$ et on reconnaît la dérivée de $y \times e^{5x}$

équivaut à, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $(y(x) \times e^{5x})' = 0$

équivaut à, il existe un réel $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $y(x) \times e^{5x} = C$

équivaut à, il existe un réel $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $y(x) = Ce^{-5x}$

Étape 2 Recherche d'une solution particulière de l'équation complète : $y' + 5y = 12$

On recherche une solution particulière, notée, y_p, constante sur $\mathbb{R}$,

il existe alors un réel K tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $y_p(x) = K$

dans ce cas pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $y_p'(x) = 0$

l'équation $y' + 5y = 12$ devient alors : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 + 5K = 12$

finalement on obtient $K = \frac{12}{5}$

Une solution particulière de l'équation complète est alors $y_p(x) = \frac{12}{5}$

Étape 3 Obtention de toutes les solutions de l'équation complète (E) : $y' + 5y = 12$

On sait déjà que $y_p' + 5y_p = 12$

y est une solution de (E) équivaut à $y' + 5y = 12$

équivaut à $y' + 5y = y_p' + 5y_p$

équivaut à $(y - y_p)$ est une solution de (H)

équivaut à il existe $C \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$y(x) - y_p(x) = Ce^{-5x}$$

Finalement toutes les solutions des (E) sont les fonctions y vérifiant :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{12}{5} + Ce^{-5x}$$

où C est une constante réelle quelconque.

Étape 4 Avec la conditions initiale.

Sachant que $y(0) = 8$ cela donne : $8 = \frac{12}{5} + Ce^{0}$

donc $C = 8 - \frac{12}{5} = \frac{28}{5}$

L'unique solution du problème est alors la fonction y vérifiant :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{12}{5} + \frac{28}{5}e^{-5x}$$