Suites numériques

EXERCICE 1 On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 20$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.

2. Quelles conjectures peut-on observer à propos du sens de variation de u ainsi que d'un éventuel minorant ?

3. On souhaite démontrer celles-ci par récurrence. Compléter les cases laissées vides :

Définition : pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit H_n la proposition : " $6 \leqslant u_{n+1} < u_n$ "

Initialisation : pour l'entier $n = 0$, on a : $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

donc $\boxed{\qquad\qquad}$

la proposition H est vraie au rang 0

Hérédité : Soit n un entier supérieur ou égal à 0, pour lequel on suppose que la proposition H est vraie

pour cet entier on a donc $\boxed{\qquad\qquad}$

donc $\boxed{\qquad\qquad}$ en multipliant tous les termes par $\dfrac{1}{2}$

donc $\boxed{\qquad\qquad}$ en ajoutant 3 à chaque terme de l'inégalité

c'est à dire $\boxed{\qquad\qquad}$

donc la proposition H est vraie au rang $n + 1$

Conclusion : on sait que H est vraie pour l'entier initial 0

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si la proposition est vraie au rang n alors on a démontré qu'elle était encore vraie au rang $\boxed{\qquad}$

donc par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition H est vraie.

C'est à dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\boxed{\qquad\qquad}$

On peut donc conclure que la suite u est $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

EXERCICE 2 Montrer que la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 4$ est croissante et majorée par 12 en vous inspirant de la démonstration précédente.

EXERCICE 3 Montrer que la suite définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ est décroissante et minorée par 0.

EXERCICE 4 Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

EXERCICE 5 Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$T_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$