Série d'exercices sur les fonctions

EXERCICE 1 Images et antécédents

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3x + 7.$$

1. Calculer les images par f des nombres suivants :

$$-2\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 3\ ;\ 5.$$

2. Déterminer l'antécédent de 10 par f.
3. Déterminer l'antécédent de -5 par f.
4. Résoudre l'équation : $f(x) = 1$.
5. Résoudre l'équation : $f(x) = 0$.
6. Un nombre réel peut-il avoir plusieurs images par une fonction ?

EXERCICE 2 Lecture graphique et variations

On considère une fonction g définie sur l'intervalle $[-4\,;\,5]$, dont la représentation graphique est donnée par les informations suivantes :

- La courbe passe par les points de coordonnées :

$$A(-4\,;\,1),\quad B(-2\,;\,4),\quad C(1\,;\,-2),\quad D(3\,;\,2),\quad E(5\,;\,0).$$

- La fonction est strictement croissante sur $[-4\,;\,-2]$.
- La fonction est strictement décroissante sur $[-2\,;\,1]$.
- La fonction est strictement croissante sur $[1\,;\,3]$.
- La fonction est strictement décroissante sur $[3\,;\,5]$.

1. Donner les images suivantes :

$$g(-4),\quad g(-2),\quad g(1),\quad g(3),\quad g(5).$$

2. Dresser le tableau de variations de g sur $[-4\,;\,5]$.
3. Préciser les intervalles sur lesquels g est croissante et ceux sur lesquels elle est décroissante.
4. Donner le maximum et le minimum de g sur $[-4\,;\,5]$.
5. Résoudre graphiquement, à l'aide des informations fournies, l'inéquation :

$$g(x) \geq 2.$$

6. Comparer $g(-3)$ et $g(-2)$, puis $g(2)$ et $g(3)$. Justifier sans calculer les images.

EXERCICE 3 Étude d'une fonction affine

Une entreprise propose un service de location de vélos. Le prix à payer dépend du nombre d'heures de location.
Le prix est composé d'un forfait fixe de 5 euros auquel s'ajoutent 3 euros par heure de location.
On note $f(x)$ le prix, en euros, pour une location de x heures.

1. Justifier que la fonction f est définie par :
$$f(x) = 3x + 5.$$
2. Préciser l'ensemble de définition de f dans le contexte de l'exercice.
3. Calculer $f(2)$ et interpréter le résultat.
4. Déterminer le nombre d'heures de location correspondant à un prix de 26 euros.
5. La fonction f est-elle croissante ou décroissante ? Justifier.
6. Calculer l'évolution du prix lorsque la durée de location augmente de 2 heures.
7. Expliquer le rôle des coefficients 3 et 5 dans l'expression de $f(x)$.

EXERCICE 4 Étude d'une fonction polynôme du second degré

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = -x^2 + 6x - 5.$$
1. Calculer les images par h des nombres :
$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6.$$
2. Montrer que :
$$h(x) = -(x-3)^2 + 4.$$
3. En déduire la valeur maximale de h et préciser pour quelle valeur de x elle est atteinte.
4. Dresser le tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$.
5. Résoudre l'équation :
$$h(x) = 0.$$
6. Résoudre l'inéquation :
$$h(x) \geq 0.$$
7. Comparer $h(1)$ et $h(2)$, puis $h(4)$ et $h(5)$. Justifier à l'aide des variations de la fonction.

EXERCICE 5 Variations et comparaison de fonctions

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ par :

$$f(x) = x^2 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 12x - 2x^2.$$

1. Calculer les images de 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6 par chacune des deux fonctions.

2. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\,6]$.

3. Montrer que :

$$g(x) = -2(x-3)^2 + 18.$$

4. En déduire les variations de g sur $[0\,;\,6]$.

5. Déterminer les extremums de chacune des deux fonctions sur l'intervalle considéré.

6. Résoudre l'équation :

$$f(x) = g(x).$$

7. Pour quelles valeurs de x a-t-on :

$$f(x) \leq g(x) \ ?$$

8. Comparer les variations des deux fonctions. Expliquer pourquoi une fonction peut être croissante sur un intervalle alors qu'une autre est décroissante sur ce même intervalle.