

Exercice 1 – Dépréciation d'une machine-outil

Une entreprise achète une machine-outil neuve pour un prix de 48 000 €. On estime que, chaque année, la valeur de la machine diminue de 18 %, puis qu'une remise en état lui fait gagner 1 500 € de valeur.

On note u_n la valeur, en euros, de la machine après n années. Ainsi :

$$u_0 = 48\,000$$

et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 0,82u_n + 1\,500.$$

Partie A – Étude des premiers termes

1. À l'aide de la calculatrice, calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
2. La suite (u_n) semble-t-elle être une suite arithmétique ? Justifier la réponse en calculant deux différences successives.
3. La suite (u_n) semble-t-elle être une suite géométrique ? Justifier la réponse en calculant deux quotients successifs.

Partie B – Une suite auxiliaire

On cherche à transformer la suite (u_n) en une suite géométrique.

4. Déterminer le nombre L tel que :

$$L = 0,82L + 1\,500.$$

5. On définit la suite (v_n) par :

$$v_n = u_n - L.$$

Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = 0,82v_n.$$

6. En déduire que la suite (v_n) est géométrique. Donner sa raison.
7. Calculer son premier terme v_0 .
8. Donner l'expression de v_n en fonction de n .

Partie C – Expression explicite de (u_n)

9. En utilisant la relation entre u_n et v_n , donner l'expression explicite de u_n en fonction de n .

Exercice 2 – Évolution du nombre de clients d'une entreprise

Une entreprise de maintenance informatique compte initialement 1 200 clients. Chaque année, elle conserve 90 % de ses clients et réussit à conquérir 180 nouveaux clients.

On note u_n le nombre de clients de l'entreprise après n années.

On a donc :

$$u_0 = 1\,200$$

et

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 180.$$

Partie A – Premières observations

1. À l'aide de la calculatrice, calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
2. Montrer, à l'aide de calculs, que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
3. Montrer que la suite (u_n) n'est pas géométrique.

Partie B – Construction d'une suite géométrique

On souhaite déterminer une expression explicite de u_n .

4. Déterminer le nombre L vérifiant :

$$L = 0,9L + 180.$$

5. On pose :

$$v_n = u_n - L.$$

Montrer que :

$$v_{n+1} = 0,9v_n.$$

6. En déduire que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison.
7. Calculer v_0 .
8. En déduire l'expression de v_n en fonction de n .

Partie C – Retour à la suite (u_n)

9. En déduire la définition explicite de u_n en fonction de n .
10. À l'aide de cette expression, déterminer le nombre de clients prévu après 15 ans.

Exercice 3 – Production d'une ligne automatisée

Une usine met en place une nouvelle ligne de production. Lors du premier mois, elle produit 2 500 pièces.

Chaque mois, en raison de l'usure des machines, la production représente 95 % de celle du mois précédent. Une amélioration du processus permet cependant d'ajouter 250 pièces à la production mensuelle.

On note u_n la production, en nombre de pièces, au cours du mois n , avec :

$$u_0 = 2\,500.$$

On admet que :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 250.$$

Partie A – Utilisation de la calculatrice

1. Calculer les cinq premiers termes u_0 , u_1 , u_2 , u_3 et u_4 à l'aide de la calculatrice.
2. Expliquer pourquoi la suite n'est pas arithmétique.
3. Expliquer pourquoi la suite n'est pas géométrique.

Partie B – Une nouvelle suite

4. Déterminer le nombre L tel que :

$$L = 0,95L + 250.$$

5. On définit :

$$v_n = u_n - L.$$

Montrer que :

$$v_{n+1} = 0,95v_n.$$

6. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Donner sa raison.
7. Calculer son premier terme v_0 .
8. Donner la définition explicite de v_n .

Partie C – Expression explicite

9. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = v_n + L.$$

10. En déduire l'expression explicite de u_n .
11. Calculer la production prévue au 10^e mois.

Exercice 4 – Chiffre d'affaires d'un service commercial

Une société propose un nouveau service d'abonnement. Lors de son lancement, son chiffre d'affaires mensuel est de 15 000 €.

Chaque mois, le chiffre d'affaires augmente de 12 % grâce à l'augmentation du nombre d'abonnés, mais l'entreprise doit faire face à une diminution fixe de 800 € liée à certaines remises commerciales.

On note u_n le chiffre d'affaires, en euros, au cours du mois n , avec :

$$u_0 = 15\,000.$$

On modélise son évolution par :

$$u_{n+1} = 1,12u_n - 800.$$

Partie A – Observation des premiers termes

1. À l'aide de la calculatrice, calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

2. Calculer les différences :

$$u_1 - u_0, \quad u_2 - u_1, \quad u_3 - u_2.$$

En déduire que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

3. Calculer les quotients :

$$\frac{u_1}{u_0}, \quad \frac{u_2}{u_1}, \quad \frac{u_3}{u_2}.$$

En déduire que la suite (u_n) n'est pas géométrique.

Partie B – Transformation de la suite

4. Déterminer le nombre L vérifiant :

$$L = 1,12L - 800.$$

5. On définit la suite (v_n) par :

$$v_n = u_n - L.$$

Montrer que :

$$v_{n+1} = 1,12v_n.$$

6. En déduire que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison.

7. Calculer v_0 .

8. Donner l'expression explicite de v_n en fonction de n .

Partie C – Retour au chiffre d'affaires

9. En utilisant la relation entre u_n et v_n , donner l'expression explicite de u_n .

10. Vérifier que cette expression permet bien de retrouver u_1 .

11. Déterminer le chiffre d'affaires prévu au 12^e mois.