

2_{pts} **Soin :** écriture lisible, régulière, traits au crayon et à la règle, exercices séparés clairement.

3_{pts} **EXERCICE 1** A l'aide de la calculatrice donner la valeur exacte de U_5 dans les trois cas suivants :

1. En sachant que $U_n = 2n + 3$

$$\text{On a : } U_5 = 2 \times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$$

2. En sachant que $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 2U_n + 1$

$$\text{On doit calculer les termes précédents : } U_1 = 2 \times 2 + 1 = 5 \text{ puis } U_2 = 2 \times 5 + 1 = 11 \text{ puis } U_3 = 2 \times 11 + 1 = 23 \text{ puis } U_4 = 2 \times 23 + 1 = 47 \text{ et enfin } U_5 = 2 \times 47 + 1 = 95$$

3. En sachant que $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = 3U_n + n - 2$

On doit calculer les termes précédents mais c'est un peu plus subtil :

$$U_1 = U_{0+1} = 3 \times 0 + 0 - 2 = -2$$

$$U_2 = U_{1+1} = 3 \times (-2) + 1 - 2 = -5$$

$$U_3 = U_{2+1} = 3 \times (-5) + 2 - 2 = -15$$

$$U_4 = U_{3+1} = 3 \times (-15) + 3 - 2 = -44$$

$$U_5 = U_{4+1} = 3 \times (-44) + 4 - 2 = -130$$

4_{pts} **EXERCICE 2** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne : $U_n = 4n + 7$

1. Calculer U_0 , U_1 , U_2 , U_3 .

$$U_0 = 4 \times 0 + 7 = 7, \quad U_1 = 4 \times 1 + 7 = 11, \quad U_2 = 4 \times 2 + 7 = 15, \quad U_3 = 4 \times 3 + 7 = 19$$

2. Exprimer U_{n+1} en fonction de n

$$U_{n+1} = 4 \times (n + 1) + 7 = 4n + 4 + 7 = 4n + 11$$

3. En déduire que $U_{n+1} - U_n = 4$

$$U_{n+1} - U_n = (4n + 11) - (4n + 7) = 4n + 11 - 4n - 7 = 4$$

4. A quelle famille appartient cette suite (U_n) ? Quelle est sa raison ?

Puisque pour tout entier naturel n , on a : $U_{n+1} - U_n = 4$ la suite U est arithmétique, de raison 4

5. Écrire alors sa définition récursive.

$$\text{Sa définition récursive est alors } U_0 = 7 \text{ et pour tout entier naturel } n, U_{n+1} = U_n + 4$$

3 pts **EXERCICE 3** Sachant que U est arithmétique, que $U_4 = 25$ et que $U_9 = 85$,

1. Rappeler la définition explicite ou directe d'une suite arithmétique.

Dans le cours, cette définition est : pour tout entier naturel n , $U_n = U_0 + n \times R$

2. Montrer que $R = 12$ puis calculer U_0

Comme $U_9 = 85$ cela donne $U_0 + 9R = 85$ donc $U_0 = 85 - 9R$

Comme $U_4 = 25$ cela donne $U_0 + 4R = 25$ donc $U_0 = 25 - 4R$

On a donc l'égalité $85 - 9R = 25 - 4R$ donc $85 - 25 = -4R + 9R$ donc $5R = 60$ donc $R = \frac{60}{5}$
c'est à dire $R = 12$

Comme on avait $U_0 = 85 - 9R$ cela donne $U_0 = -23$

3. Montrer que $U_{32} = 477$

Puisque pour tout entier naturel n , $U_n = U_0 + n \times R$, cela donne : $U_3 = -23 + 30 \times 12$
donc $U_{30} = 337$

4. Combien y a-t-il de termes de U_0 à U_{30} ?

Comme on commence à compter à partir de 0, il y a 31 termes.

5. En déduire la valeur exacte de la somme $S = U_0 + \dots + U_{30}$

D'après le cours, $S = \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2} \times \text{nbde termes}$

cela donne $S = \frac{-23 + 337}{2} \times 31 = 4867$

4 pts **EXERCICE 4** On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 7$.

1. Calculer U_1 et U_2 .

On calcule $U_1 = \frac{1}{2} \times 2 + 7 = 1 + 7 = 8$ et $U_2 = \frac{1}{2} \times 8 + 7 = 4 + 7 = 11$

2. Expliquer pourquoi la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

$$U_1 - U_0 = 6 \quad \text{et} \quad U_2 - U_1 = 3$$

Ces nombres sont différents, la suite ne peut pas être arithmétique.

$$\frac{U_1}{U_0} = 4 \quad \text{et} \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{11}{8} \approx 1,4$$

Ces nombres sont différents, la suite ne peut pas être géométrique.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - 14$. Montrer que la suite (V_n) est géométrique. Donner sa raison et son premier terme V_0

Pour tout entier naturel n , on a :

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 14 \quad \text{puis} \quad V_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 7 - 14 \text{ donc } V_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 7$$

$$\text{or } V_n = U_n - 14 \text{ donc } U_n = V_n + 14 \text{ donc } V_{n+1} = \frac{1}{2}(V_n + 14) - 7$$

$$\text{En développant cela donne : } V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n + 7 - 7 \text{ c'est à dire } V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$$

La suite V est alors géométrique, de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 14 = -12$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire V_n puis U_n en fonction de n

D'après ce qui précède, pour tout entier naturel n , on a : $V_n = -12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

or on a vu que $U_n = V_n + 14$ donc $U_n = -12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 14$

4pts **EXERCICE 5**

Dans un lycée, on dispose au 1^{er} septembre 2026 d'un stock de 500 manuels scolaires.
Chaque année :

- 10 % des manuels sont retirés du stock car ils sont trop anciens ou trop abîmés ;
- le lycée achète ensuite 100 nouveaux manuels.

On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n représente le nombre de manuels disponibles au 1^{er} septembre de l'année $(2026 + n)$.

On obtient ainsi une suite (u_n) telle que :

$$u_0 = 500 \text{ et } u_{n+1} = 0,9u_n + 100 \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .

$$\text{On a : } u_1 = 0,9 \times 500 + 100 = 550 \text{ puis } u_2 = 0,9 \times 550 + 100 = 595$$

Combien de manuels seront disponibles au 1^{er} septembre 2027 ?

Pour 2027, on a : $n = 1$ donc 550 manuels

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 1000$ pour tout entier naturel n .

- (a) Montrer que $v_{n+1} = 0,9v_n$ En déduire la famille à laquelle appartient la suite (v_n) . On précisera sa raison et son premier terme v_0 .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout entier naturel } n, \text{ on a : } v_{n+1} &= u_{n+1} - 1000 \\ &= 0,9u_n + 100 - 1000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 0,9u_n - 900 \\ &= 0,9(v_n + 1\,000) - 900 \\ &= 0,9v_n + 900 - 900 \\ &= 0,9v_n \end{aligned}$$

La suite v est donc géométrique,

de raison $q = 0,9$ et de 1er terme $v_0 = u_0 - 1000 = -500$

(b) Donner la définition directe de la suite (v_n) .

D'après le cours, on a : $v_n = -500 \times (0,9)^n$

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 1000 - 500 \times 0,9^n$

On a vu que $u_n = v_n + 1000$ donc $u_n = 1000 - 500 \times 0,9^n$