SERIE D'EXERCICES
sur les dérivées

EXERCICE 1 Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$f_1(x) = \dfrac{1}{2x+3}$
$f_1'(x) = \dfrac{-2}{(2x+3)^2}$

$f_2(x) = \dfrac{1}{3x+4}$
$f_2'(x) = \dfrac{-3}{(3x+4)^2}$

$f_3(x) = \dfrac{1}{4x+5}$
$f_3'(x) = \dfrac{-4}{(4x+5)^2}$

$f_4(x) = \dfrac{1}{4x-5}$
$f_4'(x) = \dfrac{-4}{(4x-5)^2}$

$f_5(x) = \dfrac{3}{2x+1}$
$f_5'(x) = \dfrac{-6}{(2x+1)^2}$

$f_6(x) = \dfrac{4}{2x+3}$
$f_6'(x) = \dfrac{-8}{(2x+3)^2}$

$f_7(x) = \dfrac{2}{1-5x}$
$f_7'(x) = \dfrac{10}{(1-5x)^2}$

$f_8(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$
Quotient : $f_8'(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

$f_9(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$
$f_9'(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$

$f_{10}(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$
$f_{10}'(x) = \dfrac{5}{(x+3)^2}$

$f_{11}(x) = \dfrac{3x-1}{x+4}$
$f_{11}'(x) = \dfrac{13}{(x+4)^2}$

$f_{12}(x) = \dfrac{5x+6}{2x-3}$
$f_{12}'(x) = \dfrac{-27}{(2x-3)^2}$

$f_{13}(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$
$f_{13}'(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

$f_{14}(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$
$f_{14}'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+2)^2}$

$f_{15}(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+1}$
$f_{15}'(x) = \dfrac{-2x-4}{(x^2+4x+1)^2}$

$f_{16}(x) = \dfrac{2}{3x^2-5}$
$f_{16}'(x) = \dfrac{-12x}{(3x^2-5)^2}$

$f_{17}(x) = \dfrac{8}{4+7x^2}$
$f_{17}'(x) = \dfrac{-112x}{(4+7x^2)^2}$

$f_{18}(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}$
En développant :

$$f_{18}(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2+7x+12}$$

Puis :

$$f_{18}'(x) = \frac{4x^2+20x+22}{(x^2+7x+12)^2}$$

$f_{19}(x) = \dfrac{x^3}{x+3}$
$f_{19}'(x) = \dfrac{2x^3+9x^2}{(x+3)^2}$

$f_{20}(x) = \sqrt{3x+1}$
$f_{20}'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

$f_{21}(x) = \sqrt{5x-2}$
$f_{21}'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-2}}$

$f_{22}(x) = \sqrt{1-7x}$
$f_{22}'(x) = \dfrac{-7}{2\sqrt{1-7x}}$

$f_{23}(x) = \sqrt{3x^2+9}$
$f_{23}'(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+9}}$

$f_{24}(x) = \sqrt{x^2+7x-3}$
$f_{24}'(x) = \dfrac{2x+7}{2\sqrt{x^2+7x-3}}$

$f_{25}(x) = \cos(2x+3)$
$f_{25}'(x) = -2\sin(2x+3)$

$f_{26}(x) = \sin(5x-4)$
$f_{26}'(x) = 5\cos(5x-4)$

$f_{27}(x) = (2x+4)^3$
$f_{27}'(x) = 6(2x+4)^2$

$f_{28}(x) = (5x-1)^3$
$f_{28}'(x) = 15(5x-1)^2$

$f_{29}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
Écriture sous forme de puissance : $f_{29}(x) = x^{-\frac{1}{2}}$.
Donc $f_{29}'(x) = -\dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$.

$f_{30}(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$
Dérivation du quotient intérieur puis de la racine :

$$f_{30}'(x) = \frac{-2}{(x-2)^2\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}}$$

EXERCICE 2

Dans une plaque de 30cm sur 20 cm, on découpe quatre coins carrés de côtés x puis on plie selon les pointillés pour réaliser un réceptacle. Le but est de déterminer la valeur de x pour laquelle le volume sera maximal. Pourra-t-on y verser 1 litre de lait ?

a) Quelles sont les valeurs possibles pour la longueur x ?

On doit avoir :

$$x > 0 \quad \text{et} \quad 20 - 2x > 0.$$

Ainsi, les valeurs possibles sont :

$$\boxed{x \in]0\,;\,10[}$$

b) Montrer que le volume V de la boite vérifie $V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$.

Le volume est :

$$V(x) = x(30 - 2x)(20 - 2x)$$

En développant :

$$\boxed{V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x}$$

c) Calculer la dérivée $V'(x)$.

Dérivation d'un polynôme :

$$\boxed{V'(x) = 12x^2 - 200x + 600}$$

d) Déterminer le signe de $V'(x)$ en fonction de x.

On factorise :

$$V'(x) = 4(3x^2 - 50x + 150)$$

On résout $3x^2 - 50x + 150 = 0$.

Le discriminant vaut :

$$\Delta = (-50)^2 - 4 \times 3 \times 150 = 700$$

Les deux racines sont :

$$x_1 = \frac{25 - 5\sqrt{7}}{3} \quad ; \quad x_2 = \frac{25 + 5\sqrt{7}}{3}$$

Or $x_2 > 10$. Seule x_1 appartient à l'intervalle étudié.

Le trinôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

Ainsi :

$$\begin{cases} V'(x) > 0 & \text{si } 0 < x < x_1 \\ V'(x) = 0 & \text{si } x = x_1 \\ V'(x) < 0 & \text{si } x_1 < x < 10 \end{cases}$$

e) En déduire les variations de $V(x)$ en fonction de x.

V est croissante sur $\left]0\,;\,\dfrac{25 - 5\sqrt{7}}{3}\right]$, puis décroissante sur $\left[\dfrac{25 - 5\sqrt{7}}{3}\,;\,10\right[$.

f) Montrer que $V(x)$ passe par un maximum pour une valeur de x que vous déterminez.
Le maximum est atteint lorsque :

$$\boxed{x = \frac{25 - 5\sqrt{7}}{3}}$$

soit environ $x = 3{,}92$ cm.
Sa valeur exacte est :

$$V_{\max} = \frac{10000 + 7000\sqrt{7}}{27}$$

soit environ :

$$\boxed{V_{\max} \approx 1056{,}3 \text{ cm}^3}$$

g) Répondre alors à la question du problème.
On sait que 1 litre $= 1000$ cm^3.
Or :

$$1056{,}3 > 1000.$$

Oui, on pourra y verser un litre de lait. Le volume maximal est d'environ 1,056 litre.