Objectifs :

- Calculer une fonction dérivée.
- Dresser et exploiter un tableau de variation.
- Déterminer des valeurs approchées, un encadrement d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$.
- Reconnaître graphiquement la convexité, la concavité d'une fonction, un point d'inflexion.
- Étudier la convexité, la concavité d'une fonction, deux fois dérivable sur un intervalle.

# 1 Dérivation et applications

## 1.1 Dérivée des fonctions usuelles

On note $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction $f$ et $\mathscr{D}_{f'}$ l'ensemble de définition de la fonction dérivée de $f'$.

Propriété 1 : Dérivées des fonctions de référence

| Fonction $f$ | $\mathscr{D}_f$ | Fonction $f'$ | $\mathscr{D}_{f'}$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) = k$<br>$k$ étant un réel | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = 0$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = mx + p$<br>$m$ et $p$ étant des réels | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = m$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^2$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = 2x$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $[0\,;+\infty[$ | $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0\,;+\infty[$ |
| $f(x) = e^x$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) = e^x$ | $\mathbb{R}$ |

## 1.2 Dérivées et opérations

**Propriété 2. Opérations sur les dérivées**

Soit $\mathscr{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.
Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur $\mathscr{D}$, et $k$ un réel, alors :

- les fonctions $ku$, $u+v$ et $uv$ sont dérivables sur $\mathscr{D}$ et :
  $(ku)' = ku'$ ; $(u+v)' = u'+v'$ et $(uv)' = u'v + uv'$.
- si pour tout réel $a$ de $\mathscr{D}$, $v(a) \neq 0$, les fonctions $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur $\mathscr{D}$ et :
  $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

**Exercice 1** Déterminer la dérivée des fonctions suivantes définies sur l'ensemble $I$.

a) $f(x) = (x^2+x)(5x-1)$ ; $I = \mathbb{R}$ ;

b) $g(x) = x^3 + x^2$ ; $I = \mathbb{R}$ ;

c) $h(x) = \dfrac{1}{x^4}$ ; $I = ]0\,;+\infty[$ ;

d) $m(x) = \dfrac{3x-2}{4x+1}$ ; $I = ]0\,;+\infty[$ ;

e) $n(x) = (3x+4)e^x$ ; $I = \mathbb{R}$.

## 1.3 De nouvelles formules

**Propriétés 3. De nouvelles formules de dérivées**

- Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.
  La fonction composée $e^u$ est dérivable sur $I$, et sa dérivée est la fonction $u'e^u$.
- Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.
  Pour tout réel $x$, tel que $ax+b$ appartienne à $I$, la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $I$ et pour tout réel $x$ de $I$ : $g'(x) = a \times f'(ax+b)$.
- Soit $u$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$.
  La fonction $x \mapsto u^2(x)$ est dérivable sur $I$ et pour tout réel $x$ de $I$ :
  $(u^2)'(x) = 2 \times u'(x) \times u(x)$.

Exemples :

- Soit $f(x) = e^{3x-1}$. La fonction $u$ définie par $u(x) = 3x-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel $x$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = 3 \times e^{3x-1}$.
- Soit $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$. La fonction $v$ définie par $v(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
  Donc $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout réel $x$ non nul, $g'(x) = v'(x)e^{v(x)} = -\dfrac{1}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}}$.

- Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3x+6}$.
  $f(x)$ existe si $3x + 6 \geqslant 0$, c'est-à-dire si $x \geqslant -2$ ; ainsi $D_f = [-2\,;+\infty[$.
  Pour tout réel $x$ de $D_f$, on peut écrire $f(x) = g(3x+6)$ où $g$ est la fonction racine carrée $X \mapsto \sqrt{X}$.
  La fonction $g$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et pour tout $X > 0$, $g'(X) = \dfrac{1}{2\sqrt{X}}$.
  On a $X > 0$ lorsque $x > -2$. Par conséquent, $f$ est dérivable sur $D_f = ]-2\,;+\infty[$ et pour tout $x > -2$, $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+6}}$.
- Soit $f(x) = (3x+7)^2$. La fonction $u$ définie par $u(x) = 3x + 7$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel $x$,
  $f'(x) = 2u'(x)u(x) = 2 \times 3 \times (3x+7) = 6(3x+7)$.

**Exercice 2** Déterminer la dérivée des fonctions suivantes définies sur l'ensemble $I$.

a) $f(x) = (2x^3 - 3)^2$ ; $I = \mathbb{R}$ ;

b) $g(x) = (x-1)^3$ ; $I = \mathbb{R}$ ;

c) $h(x) = (2x-1)e^{-x+3}$ ; $I = \mathbb{R}$.

## 1.4 Application de la dérivation

**Propriété 4. Sens de variation d'une fonction**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.

- $f$ est croissante sur $I$, si et seulement si, pour tout $x$ de $I$, $f'(x) \geqslant 0$.
- $f$ est décroissante sur $I$, si et seulement si, pour tout $x$ de $I$, $f'(x) \leqslant 0$.
- $f$ est constante sur $I$, si et seulement si, pour tout $x$ de $I$, $f'(x) = 0$.

Exemple : Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 9$. Étudier les variations de $f$.
$f$ est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel $x$, $f'(x) = 3x^2$.
On en déduit que, pour tout réel $x$, $f'(x) \geqslant 0$.
Par conséquent, $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On résume ces résultats dans un tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | ↗ | | ↗ | |

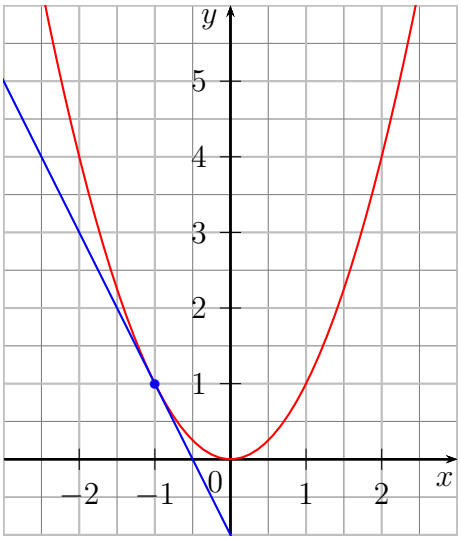
**Définition 1. Tangente à une courbe**

Si $f$ est dérivable en $x_A$ dans un repère, la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de $f$ en $x_A$ est la droite qui a pour coefficient directeur $f'(x_A)$ et qui passe par le point $A$ de coordonnées $(x_A\,;f(x_A))$.

**Propriété 5. Tangente à une courbe**

La tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de $f$ en $x_A$ est la droite qui a pour équation $y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$.

**Méthode pour déterminer par le calcul l'équation d'une tangente à une courbe en un point** On a tracé sur la courbe représentative de la fonction carrée la tangente au point d'abscisse $-1$.




On a $f'(x) = 2x$, pour tout réel $x$.

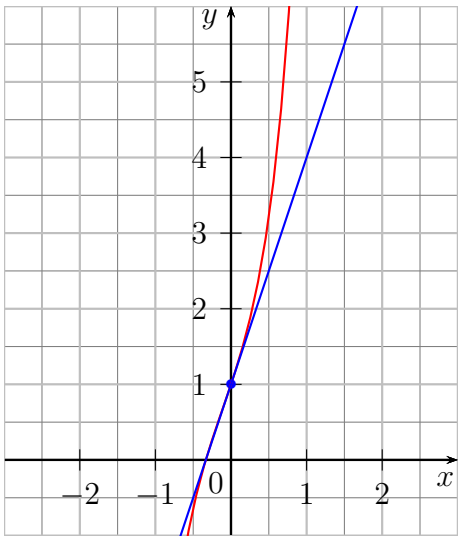
$f'(x_A) = 2 \times (-1) = -2$ et $f(x_A) = (-1)^2 = 1$

Par suite, l'équation de la tangente à la courbe en $A$ est : $y = -2\big(x - (-1)\big) + 1$,

c'est-à-dire
$y = -2(x + 1) + 1 = -2x - 2 + 1$

D'où l'équation de la tangente au point d'abscisse $-1$ est : $y = -2x - 1$.

**Exercice 3** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x + 1)e^{x^2}$.
On a tracé ci-contre $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative ainsi que la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.




1. Calculer $f'(x)$.

2. Étudier les variations de $f$.

3. a) Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$.

   b) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente $\mathscr{T}$.

# 2 Continuité d'une fonction

Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

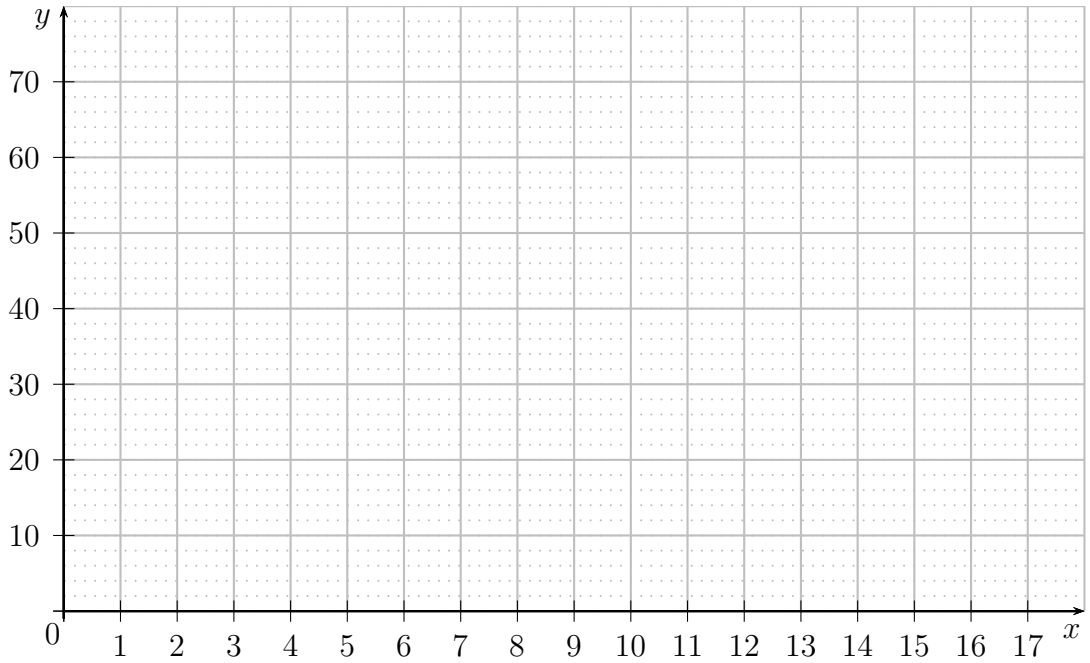
## 2.1 Vers l'idée de continuité

Le criquet est enfermé dans une cuticule inextensible. La taille du criquet s'accroît brusquement par paliers chaque fois qu'il se débarrasse de son enveloppe rigide, c'est-à-dire chaque fois qu'il mue. Les biologistes disent que le criquet a une croissance « discontinue ». Le tableau ci-dessous donne la taille du criquet en fonction de son âge.

| **Âge du criquet** | **Taille du criquet** |
|---|---|
| De 0 à 6 jours exclu | 9 mm |
| De 6 à 8 jours exclu | 12 mm |
| De 8 à 10 jours exclu | 16 mm |
| De 10 à 13 jours exclu | 21 mm |
| De 13 à 16 jours exclu | 27 mm |
| À partir du 16$^{\text{ème}}$ jour | 40 mm |

a) Compléter le graphique suivant qui représente la fonction suivante :

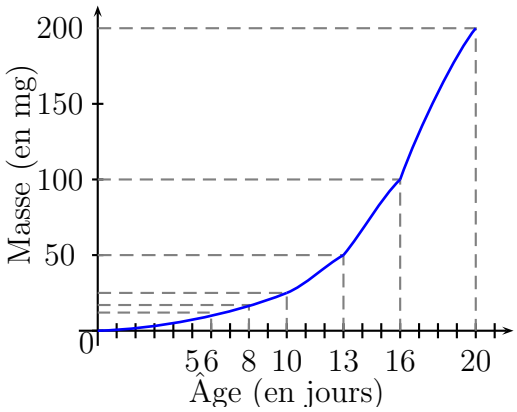
$f$ : (âge en jours) $\mapsto$ (taille en mm)




La courbe précédente $\mathscr{C}_f$ peut-elle être tracée sans lever le crayon autour du point d'abscisse 13 ?

b) Le graphique ci-dessous représente la fonction suivante :

$g$ : (âge en jours) $\mapsto$ (masse en mg).

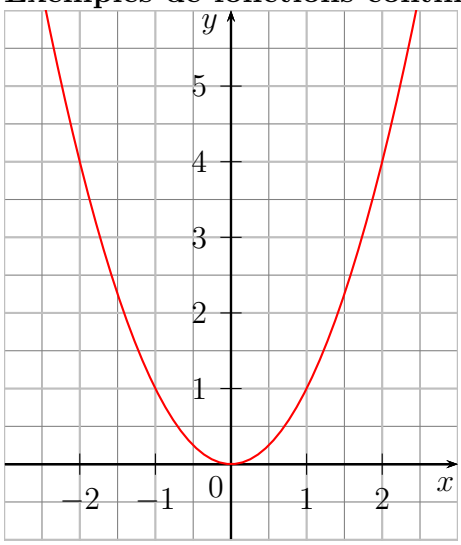


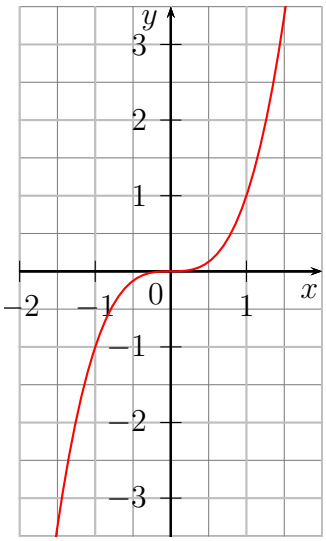

Cette courbe peut-elle être tracée sans lever le crayon ?

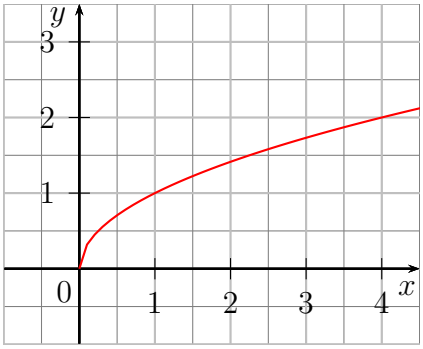
**Définition 2. Fonction continue**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. On dit que $f$ est continue sur $I$ lorsqu'on peut tracer sa courbe représentative sans avoir à « lever le crayon ».
En d'autres termes, $f$ est continue sur $I$ lorsque sa courbe représentative est « en un seul morceau » sur $I$.

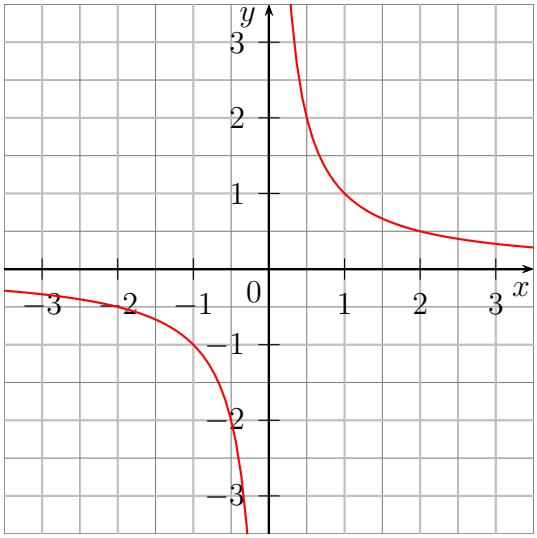
**Exemples de fonctions continues sur leur ensemble de définition**

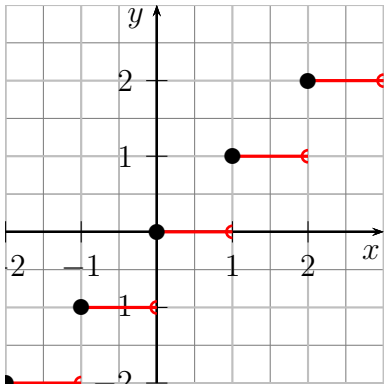


**Exemples de fonctions non continues sur leur ensemble de définition**




## 2.2 Dérivabilité et continuité

**Propriété 6. Fonction continue**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $a$ un réel de $I$.
Si $f$ est dérivable en $a$, alors $f$ est continue en $a$.

Remarques : Cette propriété nous donne un moyen pour démontrer qu'une fonction est continue sur un intervalle $I$ ; il suffit en effet de démontrer que cette fonction est dérivable sur $I$.

- La réciproque de cette propriété est fausse.
  Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

## 2.3 Tableau de variations et continuité

Dans un tableau de variations, on ne coupe pas les flèches sur les intervalles où la fonction $f$ est continue et monotone.
Exemple : Voici le tableau de variations de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | ↘ | | ‖ | ↘ | |

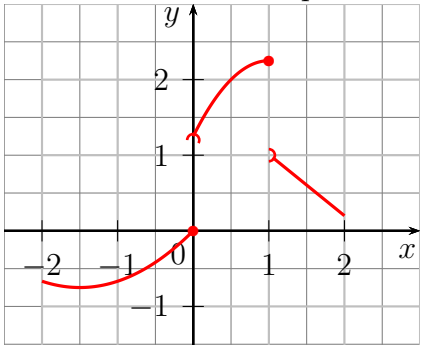
Ce tableau représente une fonction continue sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]2\,;+\infty[$.

## 2.4 Fonctions de référence

**Propriété 7. Continuité des fonctions de référence**

- Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.
- La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
- La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

**Exercice 4** On a représenté une fonction $f$ définie sur l'intervalle $I$.




1. Quel est l'intervalle $I$ ?
2. $f$ est-elle continue sur $[-2\,;1]$ ? Justifier clairement.
3. $f$ est-elle continue sur $]0\,;2]$ ? Justifier clairement.
4. Donner un intervalle sur lequel $f$ est continue.

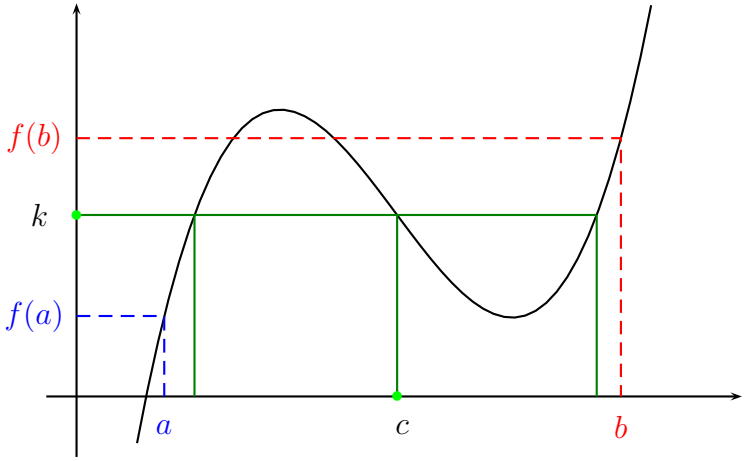
**Exercice 5** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)e^x$.
Montrer que la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

# 3 Théorème des valeurs intermédiaires

## 3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 1. Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit $f$ une fonction définie et continue sur un intervalle $I$, et $a$ et $b$ deux réels de $I$.
Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que $f(c) = k$.



Ce théorème signifie que si les hypothèses sont réalisées alors pour tout réel $k$ entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ d'inconnue $x$ admet au moins une solution entre $a$ et $b$.

- Ce théorème traduit de façon rigoureuse la propriété suivante :

**Propriété 8.**

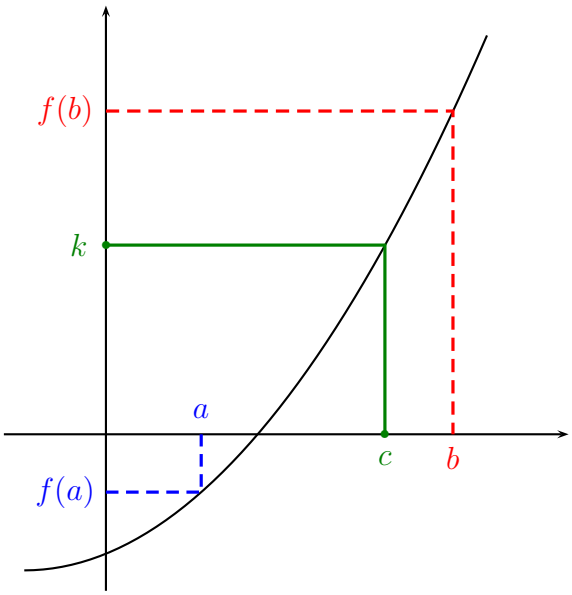
« $A$ et $B$ sont deux points d'abscisses $a$ et $b$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction $f$.
Si on peut tracer $\mathscr{C}_f$ entre $A$ et $B$ sans lever le crayon, alors toute droite d'équation $y = k$ où $k$ est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, coupe la courbe $\mathscr{C}_f$ en au moins un point. »

- La continuité de $f$ est une condition suffisante pour assurer l'existence de $c$, elle n'est pas nécessaire.

## 3.2 Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 2. Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**

Soit $f$ une fonction définie, continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$.
Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un et un seul réel $c$ dans $[a\,;b]$ tel que $f(c) = k$.




**Exercice 6** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1. Démontrer que $f'(x) = 3x(x-2)$.
2. En déduire les variations de $f$ sur l'intervalle $[2\,;3]$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2\,;3]$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution $\alpha$.
5. Dresser le tableau de signes de la fonction $f$ sur l'intervalle $[2\,;3]$.

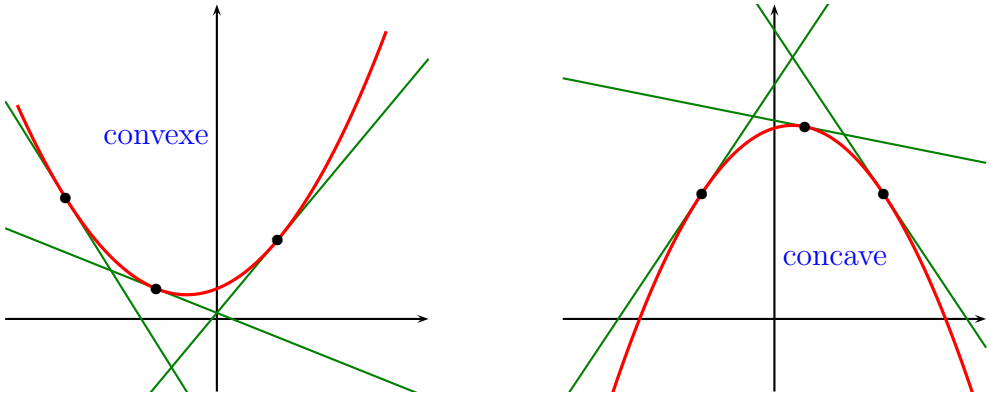
# 4 Convexité d'une fonction

## 4.1 Fonction convexe et fonction concave

**Définition 3. Convexité d'une fonction**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- Dire que la fonction $f$ est convexe sur $I$ signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
- Dire que la fonction $f$ est concave sur $I$ signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.




**Propriété 9. Convexité des fonctions de référence**

- La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cube est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;+\infty[$.
- La fonction inverse est concave sur $]-\infty\,;0[$ et convexe sur $]0\,;+\infty[$.
- La fonction racine carrée est concave sur $[0\,;+\infty[$.
- La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

## 4.2 Convexité et dérivée

**Théorème 3. Lien entre la convexité d'une fonction et sa dérivée**

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$.

- $f$ est convexe sur $I$ si, et seulement si, sa fonction dérivée $f'$ est croissante sur $I$.
- $f$ est concave sur $I$ si, et seulement si, sa fonction dérivée $f'$ est décroissante sur $I$.

Remarque : On appelle dérivée seconde d'une fonction la dérivée de sa dérivée, on la note $f''$. On peut traduire le théorème précédent avec le signe de la dérivée seconde.

**Propriété 10. Lien entre la convexité d'une fonction et sa dérivée seconde**

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$.

- $f$ est convexe sur $I$ si, et seulement si, sa dérivée seconde $f''$ est positive sur $I$.
- $f$ est concave sur $I$ si, et seulement si, sa dérivée seconde $f''$ est négative sur $I$.

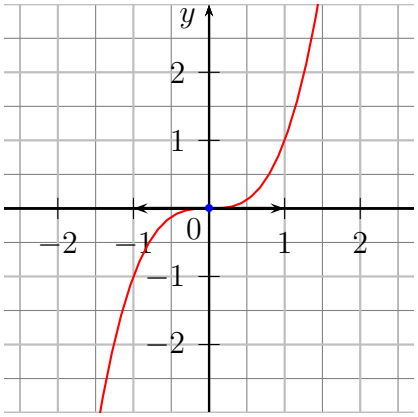
**Exercice 7** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$. Montrer que $f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

## 4.3 Point d'inflexion

**Définition 4. Point d'inflexion**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
S'il existe un point $A$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ tel que la courbe traverse sa tangente en ce point, alors on dit que $A$ est un point d'inflexion.

Exemple :




Soit $f$ la fonction cube.
La tangente au point $O$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ est l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.

- Pour $x \leqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la tangente en $O$ sur $]-\infty\,;0]$.
- Pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la tangente en $O$ sur $[0\,;+\infty[$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en $O$ donc l'origine du repère est un point d'inflexion de la fonction cube.
On en déduit les propriétés suivantes :

**Propriété 11. Point d'inflexion et tangente**

- En un point d'inflexion la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction change de convexité.
- Si la dérivée $f'$ change de sens de variation en $a$, alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse $a$.
- Si la dérivée seconde $f''$ s'annule en changeant de signe en $a$, alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse $a$.

**Exercice 8** Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Montrer que $f$ admet un point d'inflexion.