3pts **CORRIGÉ 1** Développer les expressions suivantes.

1.
$$\begin{aligned} A(x) &= (x-2)(x+3) \\ &= x^2 + 3x - 2x - 6 \\ &= x^2 + x - 6 \end{aligned}$$
$$\boxed{A(x) = x^2 + x - 6}$$

2.
$$\begin{aligned} B(x) &= (2x+3)^2 \\ &= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 \end{aligned}$$
$$\boxed{B(x) = 4x^2 + 12x + 9}$$

3pts **CORRIGÉ 2** Écrire les formes canoniques.

1. Pour $f(x) = x^2 - 5x + 2$:
   On utilise l'identité remarquable :
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = x^2 - 5x + \frac{25}{4}$$
   Ainsi :
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 5x + 2 \\ &= x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 2 \\ &= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{8}{4} \\ &= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4} \end{aligned}$$
$$\boxed{f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}}$$

2. Pour $g(x) = 2x^2 - 8x + 3$:
   On commence par factoriser par 2 les deux premiers termes :
$$\begin{aligned} g(x) &= 2(x^2 - 4x) + 3 \\ &= 2\left[(x-2)^2 - 4\right] + 3 \\ &= 2(x-2)^2 - 8 + 3 \\ &= 2(x-2)^2 - 5 \end{aligned}$$
$$\boxed{g(x) = 2(x-2)^2 - 5}$$

3pts **CORRIGÉ 3** Factoriser les expressions suivantes.

1.
$$f(x) = 2x^2 - 7x + 3$$

On calcule le discriminant :
$$\begin{aligned}\Delta &= (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 \\ &= 49 - 24 \\ &= 25\end{aligned}$$

Le discriminant est strictement positif. Le trinôme possède donc deux racines distinctes :
$$x_1 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{7+5}{4} = 3$$

On peut donc factoriser :
$$\begin{aligned}f(x) &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3) \\ &= (2x-1)(x-3)\end{aligned}$$
$$\boxed{f(x) = (2x-1)(x-3)}$$

2.
$$g(x) = 16x^2 - 9$$

On reconnaît une différence de deux carrés :
$$\begin{aligned}g(x) &= (4x)^2 - 3^2 \\ &= (4x-3)(4x+3)\end{aligned}$$
$$\boxed{g(x) = (4x-3)(4x+3)}$$

5pts **CORRIGÉ 4** Résoudre les équations suivantes.

1. $(E_1) \quad x^2 - 3x - 10 = 0$

On calcule le discriminant :
$$\begin{aligned}\Delta &= (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-10) \\ &= 9 + 40 \\ &= 49\end{aligned}$$

Le discriminant est strictement positif. Il existe donc deux solutions :
$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{49}}{2} = -2$$
$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{49}}{2} = 5$$
$$\boxed{S = \{-2\,;\,5\}}$$

2. $(E_2)\quad 9x^2 - 12x + 4 = 0$

   On calcule le discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-12)^2 - 4 \times 9 \times 4\\ &= 144 - 144\\ &= 0\end{aligned}$$

   Le discriminant est nul. L'équation possède une unique solution :

$$x_0 = \frac{-(-12)}{2 \times 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{2}{3}\right\}}$$

3. $(E_3)\quad 4x^2 - 4x = 3$

   On commence par tout ramener dans le membre de gauche :

$$4x^2 - 4x - 3 = 0$$

   On calcule le discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-4)^2 - 4 \times 4 \times (-3)\\ &= 16 + 48\\ &= 64\end{aligned}$$

   Le discriminant est strictement positif. Il existe donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{64}}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{4 + \sqrt{64}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{S = \left\{-\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right\}}$$

3pts **CORRIGÉ 5** Déterminer le tableau de signe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

puis résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.
On factorise le trinôme :

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 6x + 8\\ &= (x-2)(x-4)\end{aligned}$$

Les racines sont donc 2 et 4.
Le coefficient de x^2 est positif. Le trinôme est donc positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre celles-ci.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$x-2$	$-$		0	$+$		$+$	
$x-4$	$-$			$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	

On cherche les valeurs de x pour lesquelles $f(x) > 0$.
D'après le tableau de signe :

$$\boxed{S =]-\infty\,;\,2[\cup]4\,;\,+\infty[}$$

3pts CORRIGÉ 6

1. Montrer que
$$(x+1)(x^2-4x+3) = x^3-3x^2-x+3$$

   Développons le membre de gauche :

$$\begin{aligned}&(x+1)(x^2-4x+3)\\ &= x^3-4x^2+3x+x^2-4x+3\\ &= x^3-3x^2-x+3\end{aligned}$$

   On a bien :
$$\boxed{(x+1)(x^2-4x+3) = x^3-3x^2-x+3}$$

2. En déduire les solutions de
$$x^3-3x^2-x+3 = 0$$

   D'après la question précédente :

$$(x+1)(x^2-4x+3) = 0$$

   On factorise le trinôme :
$$x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$$

   L'équation devient :
$$(x+1)(x-1)(x-3) = 0$$

   Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.

$$\begin{cases} x+1=0 & \text{soit } x=-1\\ x-1=0 & \text{soit } x=1\\ x-3=0 & \text{soit } x=3\end{cases}$$

$$\boxed{S = \{-1\,;\,1\,;\,3\}}$$

3. Résoudre
$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 3$$

On regroupe tous les termes dans le membre de gauche :
$$x^3 - 3x^2 - x = 0$$

On met x en facteur :
$$x(x^2 - 3x - 1) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si au moins l'un de ses facteurs est nul.
On obtient donc :
$$x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x^2 - 3x - 1 = 0$$

Résolvons la seconde équation à l'aide du discriminant :
$$\begin{aligned}\Delta &= (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-1)\\ &= 9 + 4\\ &= 13\end{aligned}$$

Les deux solutions sont :
$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \qquad x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

Finalement :
$$\boxed{S = \left\{0\,;\, \frac{3 - \sqrt{13}}{2}\,;\, \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right\}}$$