EXERCICE 1 Polynôme du second degré

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = 2x^2 - 7x + 3$.

1. Calculer le discriminant de P.
2. Déterminer les racines de P.
3. Factoriser $P(x)$.
4. Dresser le tableau de signes de $P(x)$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2x^2 - 7x + 3 \leq 0$.

EXERCICE 2 Dérivée et variations

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Vérifier que : $f'(x) = 3(x+1)(x-3)$.
3. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
4. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
5. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
6. Calculer les valeurs exactes de $f(-1)$ et $f(3)$.
7. Dresser le tableau de variations complet de f.

EXERCICE 3 Étude d'une fonction polynôme du troisième degré

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 4$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. Montrer que la dérivée peut s'écrire sous la forme : $g'(x) = 3(x-2)^2$.
3. Résoudre l'équation $g'(x) = 0$.
4. Dresser le tableau de signes de $g'(x)$.
5. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
6. Calculer $g(2)$.
7. Dresser le tableau de variations complet de g.
8. La fonction g admet-elle un extremum local en $x = 2$? Justifier la réponse.

Barème sur 20 points

Exercice	**Points**
Exercice 1 : Polynôme du second degré	6 pts
Exercice 2 : Dérivée et variations	7 pts
Exercice 3 : Fonction polynôme du troisième degré	7 pts
Total	**20 pts**

Détail du barème

Exercice 1 : 6 points

- Calcul du discriminant : 1 pt
- Détermination des racines : 1,5 pt
- Factorisation : 1 pt
- Tableau de signes : 1,5 pt
- Résolution de l'inéquation : 1 pt

Exercice 2 : 7 points

- Calcul de la dérivée : 1 pt
- Factorisation de la dérivée : 1 pt
- Résolution de l'équation : 1 pt
- Tableau de signes : 1 pt
- Déduction des variations : 1 pt
- Calcul des images : 1 pt
- Tableau de variations : 1 pt

Exercice 3 : 7 points

- Calcul de la dérivée : 1 pt
- Factorisation sous forme d'un carré parfait : 1 pt
- Résolution de l'équation : 0,5 pt
- Tableau de signes : 1 pt
- Étude des variations : 1 pt
- Calcul de l'image : 0,5 pt
- Tableau de variations : 1 pt
- Justification concernant l'extremum : 1 pt

Corrigé

Exercice 1 – Polynôme du second degré

On considère le polynôme : $P(x) = 2x^2 - 7x + 3$.

1. Calcul du discriminant

On identifie : $a = 2, \quad b = -7, \quad c = 3.$

Le discriminant est :
$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 \\ &= 49 - 24 \\ &= \boxed{25}.\end{aligned}$$

2. Détermination des racines

Comme $\Delta = 25 > 0$, le polynôme possède deux racines réelles distinctes.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
On calcule :
$$= \frac{7 - 5}{4}$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}}.$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
Et :
$$= \frac{7 + 5}{4}$$
$$= \boxed{3}.$$

Les deux racines sont donc : $\boxed{x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = 3}$.

3. Factorisation de $P(x)$

On utilise les racines et le coefficient dominant : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Ainsi : $P(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3)$.
Finalement : $\boxed{P(x) = (2x - 1)(x - 3)}$.

4. Tableau de signes de $P(x)$

Le coefficient dominant est positif. Le polynôme est donc positif à l'extérieur des racines et négatif entre celles-ci.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. Résolution de l'inéquation

On cherche à résoudre : $2x^2 - 7x + 3 \leq 0$.
D'après le tableau de signes précédent, le polynôme est négatif ou nul entre ses deux racines.

L'ensemble des solutions est donc : $\boxed{S = \left[\frac{1}{2} ; 3\right]}$.

Exercice 2 – Dérivée et variations

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

1. Calcul de la dérivée
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.
On dérive chaque terme : $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 6x - 9}$.

2. Factorisation de $f'(x)$
On met 3 en facteur : $f'(x) = 3(x^2 - 2x - 3)$.
On factorise le trinôme : $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$.
On obtient : $\boxed{f'(x) = 3(x + 1)(x - 3)}$.

3. Résolution de l'équation $f'(x) = 0$
On résout : $3(x + 1)(x - 3) = 0$.
Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
Ainsi : $x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$.
Les solutions sont : $\boxed{x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 3}$.

4. Tableau de signes de $f'(x)$
Le coefficient dominant du trinôme $f'(x)$ est positif. La dérivée est donc positive à l'extérieur des racines et négative entre celles-ci.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. Étude des variations de f
On utilise le signe de la dérivée :

- Sur $]-\infty\,;\,-1]$, $f'(x) \geq 0$, donc f est croissante.
- Sur $[-1\,;\,3]$, $f'(x) \leq 0$, donc f est décroissante.
- Sur $[3\,;\,+\infty[$, $f'(x) \geq 0$, donc f est croissante.

6. Calcul des valeurs exactes

Calculons $f(-1)$:
$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5$$
$$= -1 - 3 + 9 + 5$$
$$= \boxed{10}.$$

Calculons $f(3)$:
$$f(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 - 9 \times 3 + 5$$
$$= 27 - 27 - 27 + 5$$
$$= \boxed{-22}.$$

7. Tableau de variations de f
On rassemble les résultats précédents :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	10	$\searrow$	-22	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction admet donc :

- Un maximum local égal à 10, atteint en $x = -1$.
- Un minimum local égal à -22, atteint en $x = 3$.

Exercice 3 – Étude d'une fonction polynôme du troisième degré

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 4$.

1. Calcul de la dérivée
La fonction g est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On obtient : $\boxed{g'(x) = 3x^2 - 12x + 12}$.

2. Factorisation sous forme d'un carré parfait
On met 3 en facteur : $g'(x) = 3(x^2 - 4x + 4)$.
On reconnaît une identité remarquable : $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.
Ainsi : $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$.
On obtient : $\boxed{g'(x) = 3(x - 2)^2}$.

3. Résolution de l'équation $g'(x) = 0$
On résout : $3(x - 2)^2 = 0$.
Donc : $(x - 2)^2 = 0$
et ainsi : $\boxed{x = 2}$.
L'équation possède une unique solution, qui est une racine double.

4. Tableau de signes de $g'(x)$
Un carré est toujours positif ou nul. Comme le coefficient 3 est strictement positif : $3(x - 2)^2 \geq 0$ pour tout réel x.
De plus : $g'(x) = 0 \iff x = 2$.
Le tableau de signes est donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$(x-2)^2$	$+$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$+$

5. Étude des variations de g
On sait que : $g'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
Attention : la dérivée s'annule en $x = 2$, mais elle ne change pas de signe en ce point. La fonction reste donc croissante de part et d'autre de 2.

6. Calcul de $g(2)$
$$\begin{aligned} g(2) &= 2^3 - 6 \times 2^2 + 12 \times 2 - 4 \\ &= 8 - 24 + 24 - 4 \\ &= \boxed{4}. \end{aligned}$$

7. Tableau de variations complet

La fonction g est un polynôme de degré 3 dont le coefficient dominant est positif.
Ainsi, ses valeurs tendent vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, et vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
On obtient :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$	$+$		0		$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

8. Existence d'un extremum local

La dérivée s'annule en $x = 2$, mais elle est strictement positive avant et après cette valeur.
Elle ne change donc pas de signe en $x = 2$.
Par conséquent, la fonction g n'admet aucun extremum local en $x = 2$.
Le point de coordonnées : $\boxed{A(2\,;\,4)}$ est un point stationnaire de la courbe représentative de g, mais ce n'est ni un maximum ni un minimum local.
Ce cas illustre l'importance de l'étude du signe de la dérivée : une dérivée qui s'annule ne signifie pas nécessairement qu'il y a un extremum.