# SUJET A

**CORRIGÉ 1** Développer.

On utilise la double distributivité pour $A$ et l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ pour $B$.

$$\begin{aligned} A(x) &= (x-3)(x+1) = x\times x + x\times 1 - 3\times x - 3\times 1 = x^2+x-3x-3 \\ &= \boxed{x^2-2x-3} \end{aligned}$$

$$B(x) = (3x+4)^2 = (3x)^2 + 2\times 3x\times 4 + 4^2 = 9x^2+24x+16$$

Donc $\boxed{B(x) = 9x^2+24x+16}$.

**CORRIGÉ 2** Formes canoniques.

Rappel : $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$, ou, plus simplement, on factorise $a$ puis on reconnaît le début d'un carré : $x^2+px = \left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2 - \dfrac{p^2}{4}$.

**Pour** $f(x) = x^2+3x+1$ **:**

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{4}{4} \\ &= \boxed{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} \end{aligned}$$

**Pour** $g(x) = 2x^2+12x-6$ **:** on factorise d'abord par 2.

$$\begin{aligned} g(x) &= 2\left(x^2+6x-3\right) = 2\left[(x+3)^2-9-3\right] = 2\left[(x+3)^2-12\right] \\ &= \boxed{2(x+3)^2-24} \end{aligned}$$

**CORRIGÉ 3** Factoriser.

**Pour** $f(x) = 3x^2-5x+2$ **:** on cherche les racines. $\Delta = (-5)^2 - 4\times 3\times 2 = 25-24 = 1 > 0$, donc deux racines :

$$x_1 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3} \qquad x_2 = \frac{5+1}{6} = 1$$

Alors $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) = 3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)(x-1)$, soit

$$\boxed{f(x) = (3x-2)(x-1)}$$

*Vérification :* $(3x-2)(x-1) = 3x^2-3x-2x+2 = 3x^2-5x+2$. ✓

**Pour** $g(x) = 9x^2-1$ **:** c'est une différence de deux carrés $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ avec $a = 3x$ et $b = 1$ :

$$\boxed{g(x) = (3x-1)(3x+1)}$$

**CORRIGÉ 4** Résoudre les équations.

$(E_1)$ $x^2+5x-6=0$. $\Delta = 5^2-4\times 1\times(-6) = 25+24 = 49 = 7^2 > 0$ : deux solutions

$$x_1 = \frac{-5-7}{2} = -6 \qquad x_2 = \frac{-5+7}{2} = 1$$

$\boxed{S_1 = \{-6\,;\,1\}}$

$(E_2)$ $4x^2+4x+1=0$. $\Delta = 4^2-4\times 4\times 1 = 16-16 = 0$ : une solution double $x_0 = \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2}$.

*Autre méthode :* $4x^2+4x+1 = (2x+1)^2$, qui est nul si et seulement si $2x+1=0$.

$\boxed{S_2 = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}}$

$(E_3)$ $4x^2+10x=6$. On se ramène à 0 : $4x^2+10x-6=0$. On peut simplifier par 2 : $2x^2+5x-3=0$.

$\Delta = 5^2-4\times 2\times(-3) = 25+24 = 49 = 7^2 > 0$ : deux solutions

$$x_1 = \frac{-5-7}{4} = -3 \qquad x_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{S_3 = \left\{-3\,;\,\dfrac{1}{2}\right\}}$

**CORRIGÉ 5** Signe de $f(x) = x^2-4x+3$.

$\Delta = (-4)^2-4\times 1\times 3 = 16-12 = 4 = 2^2 > 0$ : deux racines

$$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \qquad x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$$

Le coefficient $a=1$ est positif : $f$ est du signe de $a$ à l'extérieur des racines, et du signe contraire entre les racines.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$f(x) > 0$ pour les $x$ où le tableau indique le signe $+$ :

$$\boxed{S = ]-\infty\,;\,1[\,\cup\,]3\,;\,+\infty[}$$

**CORRIGÉ 6** Équation du troisième degré.

**1.** On développe le membre de gauche :

$$\begin{aligned}(x+2)(x^2-5x+6) &= x^3-5x^2+6x+2x^2-10x+12\\ &= x^3-3x^2-4x+12\end{aligned}$$

On retrouve bien le membre de droite. □

**2.** D'après la question 1, l'équation $x^3-3x^2-4x+12=0$ équivaut à

$$(x+2)(x^2-5x+6)=0.$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

- $x+2=0 \iff x=-2$ ;
- $x^2-5x+6=0$ : $\Delta=25-24=1>0$, d'où $x=\dfrac{5-1}{2}=2$ ou $x=\dfrac{5+1}{2}=3$.

$\boxed{S=\{-2\,;\,2\,;\,3\}}$

**3.** $x^3-3x^2-4x+12=12 \iff x^3-3x^2-4x=0 \iff x\left(x^2-3x-4\right)=0$ (on factorise par $x$).

- $x=0$ ;
- $x^2-3x-4=0$ : $\Delta=9+16=25=5^2>0$, d'où $x=\dfrac{3-5}{2}=-1$ ou $x=\dfrac{3+5}{2}=4$.

$\boxed{S=\{-1\,;\,0\,;\,4\}}$

*Attention : on ne peut pas utiliser la factorisation de la question 2 ici, car le second membre n'est pas nul.*

# SUJET B

**CORRIGÉ 1** Formes canoniques.

**Pour** $f(x) = 2x^2 + 12x - 8$ **:** on factorise d'abord par 2.

$$f(x) = 2\left(x^2 + 6x - 4\right) = 2\left[(x+3)^2 - 9 - 4\right] = 2\left[(x+3)^2 - 13\right]$$
$$= \boxed{2(x+3)^2 - 26}$$

**Pour** $g(x) = x^2 + 3x + 1$ **:**

$$g(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{4}{4}$$
$$= \boxed{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$$

**CORRIGÉ 2** Factoriser.

**Pour** $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$ **:** $\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1 > 0$, donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-5-1}{6} = -1 \qquad x_2 = \frac{-5+1}{6} = -\frac{2}{3}$$

Alors $f(x) = 3(x+1)\left(x + \frac{2}{3}\right)$, soit

$$\boxed{f(x) = (x+1)(3x+2)}$$

*Vérification :* $(x+1)(3x+2) = 3x^2 + 2x + 3x + 2 = 3x^2 + 5x + 2$. ✓

**Pour** $g(x) = 9x^2 - 16$ **:** différence de deux carrés avec $a = 3x$ et $b = 4$ :

$$\boxed{g(x) = (3x-4)(3x+4)}$$

**CORRIGÉ 3** Développer.

$$A(x) = (x+3)(x-1) = x^2 - x + 3x - 3 = \boxed{x^2 + 2x - 3}$$

$$B(x) = (4x-3)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 3 + 3^2 = \boxed{16x^2 - 24x + 9}$$

(identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$).

**CORRIGÉ 4** Signe de $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$ : deux racines

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

Le coefficient $a = 1$ est positif : $f$ est positive à l'extérieur des racines et négative entre elles.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$$\boxed{S = ]-\infty\,;\,2[\,\cup\,]3\,;\,+\infty[}$$

**CORRIGÉ 5** Résoudre les équations.

$(E_1)$ $x^2+3x-10=0$. $\Delta = 3^2-4\times1\times(-10) = 9+40 = 49 = 7^2 > 0$ : deux solutions

$$x_1 = \frac{-3-7}{2} = -5 \qquad x_2 = \frac{-3+7}{2} = 2$$

$\boxed{S_1 = \{-5\,;\,2\}}$

$(E_2)$ $x^2-4x+4=0$. $\Delta = (-4)^2-4\times1\times4 = 0$ : une solution double $x_0 = \dfrac{4}{2} = 2$.

*Autre méthode :* $x^2-4x+4 = (x-2)^2 = 0 \iff x = 2$.

$\boxed{S_2 = \{2\}}$

$(E_3)$ $4x^2-6 = 10x$. On se ramène à $0$ : $4x^2-10x-6=0$, puis on simplifie par $2$ : $2x^2-5x-3=0$.

$\Delta = (-5)^2-4\times2\times(-3) = 25+24 = 49 = 7^2 > 0$ : deux solutions

$$x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$$

$$\boxed{S_3 = \left\{-\frac{1}{2}\,;\,3\right\}}$$

**CORRIGÉ 6** Équation du troisième degré.

**1.** On développe le membre de gauche :

$$\begin{aligned}(x-2)(x^2+5x+6) &= x^3+5x^2+6x-2x^2-10x-12\\ &= x^3+3x^2-4x-12\end{aligned}$$

On retrouve bien le membre de droite. □

**2.** D'après la question 1, l'équation $x^3+3x^2-4x-12=0$ équivaut à

$$(x-2)(x^2+5x+6)=0.$$

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

- $x-2=0 \iff x=2$ ;
- $x^2+5x+6=0$ : $\Delta = 25-24 = 1>0$, d'où $x = \dfrac{-5-1}{2} = -3$ ou $x = \dfrac{-5+1}{2} = -2$.

$\boxed{S = \{-3\,;\,-2\,;\,2\}}$

**3.** $x^3+3x^2-4x-12 = -12 \iff x^3+3x^2-4x = 0 \iff x\,(x^2+3x-4)=0$.

- $x = 0$ ;
- $x^2 + 3x - 4 = 0$ : $\Delta = 9 + 16 = 25 = 5^2 > 0$, d'où $x = \dfrac{-3-5}{2} = -4$ ou $x = \dfrac{-3+5}{2} = 1$.

$\boxed{S = \{-4\,;\,0\,;\,1\}}$
*Attention : on ne peut pas utiliser la factorisation de la question 2 ici, car le second membre n'est pas nul.*