# Partie A – Pour démarrer

**EXERCICE 1** *(Coefficients binomiaux et équiprobabilité)*

Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules noires, indiscernables au toucher. On tire simultanément 2 boules.

1. Combien de tirages différents de 2 boules sont possibles ? Justifier avec un coefficient binomial.
2. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.
3. Calculer la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur.
4. En déduire la probabilité d'obtenir au moins une boule noire.

**EXERCICE 2** *(Loi et espérance)*

Un jeu coûte 3 euros. On lance deux dés équilibrés à six faces et on regarde la somme $S$ des deux faces.

- Si $S = 7$, le joueur reçoit 12 euros.
- Si $S \geqslant 10$, le joueur reçoit 6 euros.
- Dans les autres cas, le joueur ne reçoit rien.

On note $G$ le gain algébrique du joueur (mise déduite).

1. Déterminer les valeurs prises par $G$ et donner sa loi de probabilité.
2. Calculer $\mathbb{E}(G)$. Le jeu est-il équitable ?
3. L'organisateur veut un jeu défavorable au joueur. Quelle mise minimale (en euros entiers) doit-il fixer ?

**EXERCICE 3** *(Reconnaître une loi binomiale)*

Dans chaque situation, dire si la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale. Si oui, donner ses paramètres ; sinon, expliquer pourquoi.

1. On tire 5 cartes *avec remise* dans un jeu de 32 cartes. $X$ est le nombre de cœurs obtenus.
2. On tire 5 cartes *sans remise* dans un jeu de 32 cartes. $X$ est le nombre de cœurs obtenus.
3. On lance 10 fois une pièce équilibrée. $X$ est le nombre de « pile » obtenus.
4. On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir « pile ». $X$ est le nombre de lancers.

# Partie B – Savoir rédiger

**EXERCICE 4** *(Loi binomiale avec la calculatrice)*

Un QCM comporte 10 questions indépendantes. Chaque question propose 4 réponses dont une seule est correcte. Un élève répond au hasard à toutes les questions. On note $X$ le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que $X$ suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 3)$ (arrondir à $10^{-3}$).
3. Calculer la probabilité d'avoir au moins une bonne réponse.
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer $\mathbb{P}(X \geqslant 5)$. Interpréter le résultat.
5. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et interpréter.

**EXERCICE 5** *(Chercher un seuil)*

Une machine produit des pièces. Chaque pièce est défectueuse avec une probabilité 0,1, indépendamment des autres. On prélève $n$ pièces et on note $X$ le nombre de pièces défectueuses.

1. Exprimer, en fonction de $n$, la probabilité d'avoir au moins une pièce défectueuse.
2. Déterminer le plus petit entier $n$ tel que cette probabilité soit supérieure ou égale à 0,99. On pourra utiliser la calculatrice ou la fonction ln.

**EXERCICE 6** *(Arbre pondéré et probabilités conditionnelles)*

Une maladie touche 2 % d'une population. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- si la personne est malade, le test est positif dans 95 % des cas ;
- si la personne n'est pas malade, le test est positif dans 4 % des cas.

On choisit une personne au hasard. On note $M$ : « la personne est malade » et $T$ : « le test est positif ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $\mathbb{P}(M \cap T)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(T)$ à l'aide de la formule des probabilités totales.
4. Calculer $\mathbb{P}_T(M)$. Ce résultat est-il surprenant ? Commenter.

# Partie C – Type bac

**EXERCICE 7** *(Binomiale et loi exponentielle)*

Une usine fabrique des composants électroniques. Chaque composant est défectueux avec une probabilité de 0,05, indépendamment des autres.

**Partie 1.** On prélève 20 composants et on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. On note $X$ le nombre de composants défectueux.

1. Quelle est la loi de $X$ ? Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'aucun composant ne soit défectueux (arrondir à $10^{-3}$).
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux composants défectueux.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

**Partie 2.** La durée de vie, en heures, d'un composant non défectueux est modélisée par une variable aléatoire $T$ suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}001$.

5. Calculer la probabilité que le composant fonctionne plus de 1 000 heures (arrondir à $10^{-3}$).
6. Calculer la probabilité que sa durée de vie soit comprise entre 500 et 1 500 heures.
7. Donner la durée de vie moyenne d'un composant.
8. Sachant que le composant a fonctionné 500 heures, quelle est la probabilité qu'il fonctionne encore au moins 1 000 heures supplémentaires ? Justifier.

# Partie D – Pour aller plus loin (facultatif)

**EXERCICE 8** *(Démonstrations)*

1. Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$. Démontrer l'absence de mémoire :
$$\mathbb{P}(X > s+t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$
2. Soit $X$ suivant la loi géométrique de paramètre $p$. Démontrer que $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$, puis que $\mathbb{P}(X > s+t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$ pour $s,t \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire des deux lois ?
3. On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un six. Combien de lancers faut-il prévoir au minimum pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure ou égale à 0,9 ?

# Réponses

**Ex. 1.** 1. $\binom{8}{2} = 28$. 2. $\binom{3}{2}/28 = \frac{3}{28}$. 3. $\frac{3\times 5}{28} = \frac{15}{28}$. 4. $1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}$.

**Ex. 2.** $\mathbb{P}(S = 7) = \frac{6}{36}$ et $\mathbb{P}(S \geqslant 10) = \frac{6}{36}$. Loi de $G$ : 9 avec $\frac{1}{6}$, 3 avec $\frac{1}{6}$, $-3$ avec $\frac{2}{3}$. $\mathbb{E}(G) = \frac{9}{6} + \frac{3}{6} - 2 = 0$ : jeu équitable. Mise de 4 euros au minimum (espérance du gain $= 3 - 4 = -1 < 0$).

**Ex. 3.** 1. Oui, $\mathcal{B}(5\,;\frac{1}{4})$. 2. Non (tirages dépendants, probabilité de succès variable). 3. Oui, $\mathcal{B}(10\,;\frac{1}{2})$. 4. Non (nombre d'épreuves non fixé, loi géométrique).

**Ex. 4.** $X \sim \mathcal{B}(10\,;0{,}25)$. $\mathbb{P}(X = 3) \approx 0{,}250$. $\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}75^{10} \approx 0{,}944$. $\mathbb{P}(X \geqslant 5) \approx 0{,}078$. $\mathbb{E}(X) = 2{,}5$.

**Ex. 5.** 1. $1 - 0{,}9^n$. 2. $0{,}9^n \leqslant 0{,}01 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}9} \approx 43{,}7$ donc $n = 44$.

**Ex. 6.** $\mathbb{P}(M \cap T) = 0{,}019$. $\mathbb{P}(T) = 0{,}019 + 0{,}98 \times 0{,}04 = 0{,}0582$. $\mathbb{P}_T(M) = \frac{0{,}019}{0{,}0582} \approx 0{,}326$ : un test positif ne signale une vraie maladie que dans environ un tiers des cas, car la maladie est rare.

**Ex. 7.** 1. $\mathcal{B}(20\,;0{,}05)$. 2. $0{,}95^{20} \approx 0{,}358$. 3. $1 - 0{,}95^{20} - 20 \times 0{,}05 \times 0{,}95^{19} \approx 0{,}264$. 4. $\mathbb{E}(X) = 1$. 5. $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368$. 6. $\mathrm{e}^{-0{,}5} - \mathrm{e}^{-1{,}5} \approx 0{,}383$. 7. 1 000 heures. 8. $\mathbb{P}(T > 1\,500 \mid T > 500) = \mathbb{P}(T > 1\,000) = \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368$ (absence de mémoire).

**Ex. 8.** 1. $\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda s}} = \mathrm{e}^{-\lambda t}$. 2. Même calcul avec $(1-p)^{s+t}/(1-p)^s = (1-p)^t$ : la loi géométrique est la version discrète de l'absence de mémoire. 3. $1 - (5/6)^n \geqslant 0{,}9 \iff n \geqslant \frac{\ln 0{,}1}{\ln(5/6)} \approx 12{,}6$ donc $n = 13$.