Fonction du second degré

1 Définition

On appelle fonction du second degré toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels fixes et $a \neq 0$.

Remarque : on dira aussi fonction trinôme du second degré ou simplement un polynôme du second degré.

Exemple $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ on a : $\begin{cases} a = \\ b = \\ c = \end{cases}$

$f(x) = x^2 - 3x + 4$ on a alors : $\begin{cases} a = \\ b = \\ c = \end{cases}$

$f(x) = x^2 - 4$ on a alors : $\begin{cases} a = \\ b = \\ c = \end{cases}$

$f(x) = (x+2)(x-3)$ on a alors : $\begin{cases} a = \\ b = \\ c = \end{cases}$

2 Forme canonique

Soit P une fonction polynôme du second degré définie par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

On a $P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ en factorisant artificiellement par a

puis $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$ en remarquant que $(A+B)^2 - B^2 \quad = \quad A^2 + 2AB$

enfin $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac}{4a^2}\right]$ en mettant au même dénominateur

puis $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ car $-(A-B) = -A + B$

On peut alors écrire $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

Pour faciliter la lecture, on a l'habitude de poser :

$$\Delta = b^2 - 4ac, \quad \alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } \quad \beta = -\frac{b^2-4ac}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

L'expression s'écrit alors : $\boxed{P(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta}$

3 Factorisation

On a démontré plus haut que $P(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{(2a)^2}\right]$

• Si $\Delta \geqslant 0$ alors $\sqrt{\Delta}$ existe dans $\mathbb{R}$ et $\left(\sqrt{\Delta}\right)^2 = \Delta$

donc $P(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{(2a)}\right)^2\right]$

On doit reconnaître l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A-B) \times (A+B)$ et on obtient :

$$P(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right) - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{(2a)}\right)\right] \times \left[\left(x+\frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{(2a)}\right)\right]$$

Ce que l'on peut écrire : $P(x) = a\left(x+\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{(2a)}\right) \times \left(x+\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{(2a)}\right)$

Là encore pour faciliter la lecture, on a l'habitude de poser :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

La factorisation est alors la suivante : $P(x) = ax^2 + bx + c = \boxed{a(x-x_1)(x-x_2)}$

Remarque dans le produit l'ordre des facteurs $(x-x_1)$ et $(x-x_2)$ n'importe pas. Les noms x_1 et x_2 sont interchangeables.

Exemple :

• Lorsque $\Delta = 0$ on a $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$ est noté x_0 et la factorisation s'écrit :

$$P(x) = \boxed{a(x - x_0)^2}$$

Exemple :

• Lorsque $\Delta < 0$, le terme $\sqrt{\Delta}$ n'a plus de sens chez les réels et $\boxed{\text{la factorisation dans } \mathbb{R} \text{ échoue.}}$

Exemple :

4 Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$

Soit P une fonction polynôme du second degré définie par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. D'après ce qui précède,

• si $\Delta > 0$ on a : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

donc $ax^2 + bx + c = 0$ équivaut à $a \times (x - x_1) \times (x - x_2) = 0$ qui est un produit nul

or $a \neq 0$ donc $(x - x_1) = 0$ ou $(x - x_2) = 0$

donc $ax^2 + bx + c = 0$ équivaut à $x = x_1$ ou $x = x_2$

On retient :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{a pour solutions } \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{lorsque } \Delta = b^2 - 4ac > 0}$$

Exemple :

• si $\Delta = 0$ on a : $P(x) = a(x - x_0)^2$

donc $ax^2 + bx + c = 0$ équivaut à $a \times (x - x_0)^2 = 0$ qui est un produit nul

or $a \neq 0$ donc $(x - x_0) = 0$

donc $ax^2 + bx + c = 0$ équivaut à $x = x_0$

On retient :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{a pour seule solution } \frac{-b}{2a} \qquad \text{lorsque } \Delta = b^2 - 4ac = 0}$$

Exemple :

• si $\Delta < 0$, puisque l'on a $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ avec un $-\frac{\Delta}{4a^2}$ qui est strictement positif, le contenu du crochet reste aussi strictement positif et $P(x) = 0$ n'a pas de solution réelle.

On retient :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{n'a pas de solution réelle} \qquad \text{lorsque } \Delta = b^2 - 4ac < 0}$$

Exemple :

5 Signe

Soit P une fonction polynôme du second degré définie par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. D'après ce qui précède,

$\boxed{\text{si } \Delta > 0}$

on a : $P(x) = a(x - x_1)(x_x - 2)$ (on suppose par la suite que $x_1 < x_2$)

on peut alors établir le tableau de signe suivant :

Pour $a > 0$,

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		$+$		$+$		$+$	
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$ax^2 + bx + c$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour $a < 0$,

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		$-$		$-$		$-$	
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$ax^2 + bx + c$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut retenir :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de - a	0	signe de a	

si $\Delta = 0$

on a : $P(x) = a(x - x_0)^2$

Pour $a > 0$,

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
a		$+$		$+$	
$(x - x_0)^2$		$+$	0	$+$	
$ax^2 + bx + c$		$+$	0	$+$	

Pour $a < 0$,

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
a		$-$		$-$	
$(x - x_0)^2$		$+$	0	$+$	
$ax^2 + bx + c$		$-$	0	$-$	

On peut retenir :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

si $\Delta < 0$ on a : $P(x) = ax^2 + bx + c$ ne s'annule pas et est continue, donc garde un signe constant indépendamment de x, on calcule par exemple $P(0) = c$ pour le connaître.

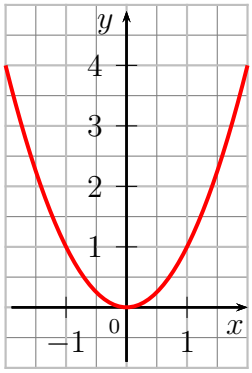
x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	

On peut retenir que $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre ses racines éventuelles.

6 Représentation graphique

6.1 Fonction 'carrée'

La représentation graphique de la fonction carrée est une parabole.



Parité : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

donc f est une fonction paire, donc son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Variations : pour tout $0 < x_1 < x_2$ on a :

$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0$

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Par symétrie, elle est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$

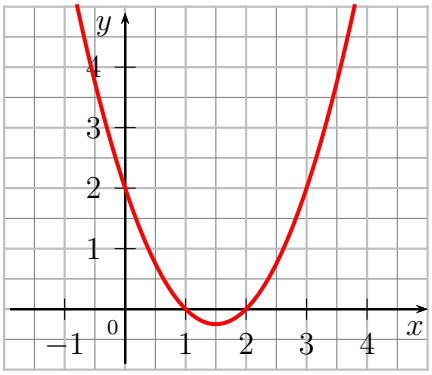
Minimum : d'après ce qui précède f admet un minimum en $x = 0$
dont la valeur est $y = f(0) = 0^2 = 0$

6.2 Généralisation

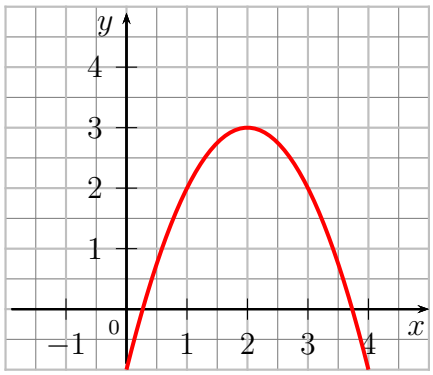
En utilisant ce qui précède on prouve que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a \times x^2$ a pour graphe :

une **parabole** orientée "vers le haut" lorsque $a > 0$

une **parabole** orientée "vers le bas" lorsque $a < 0$



avec $a > 0$



avec $a < 0$

Soit f une fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, on a démontré que : $P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$

Cette fonction admet un **extremum** pour $x = \alpha$ dont la valeur est $y = \beta$

C'est un minimum lorsque $a > 0$ et un maximum lorsque $a < 0$.