EXERCICE 1 Étude d'une suspension mécanique.
On modélise une roue et son système de suspension par un ensemble constitué d'une masse $m = 1$ kg, d'un ressort de raideur $k = 13\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ et d'un amortisseur visqueux de coefficient $c = 4\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.
À l'instant $t = 0$, le système est au repos ($x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$) et subit une force constante d'intensité $F_0 = 26$ N (passage sur un obstacle modélisé par un échelon $F(t) = F_0 u(t)$, où $u(t)$ est l'échelon unité de Heaviside).
L'équation différentielle régissant le déplacement $x(t)$ (en mètres) pour $t \geq 0$ est :

$$m\,x''(t) + c\,x'(t) + k\,x(t) = F_0\,u(t)$$

1. **Modélisation dans le domaine de Laplace :** Remplacer les paramètres par leurs valeurs numériques et déterminer la transformée de Laplace $X(p) = \mathscr{L}\{x(t)\}$.

2. **Décomposition en éléments simples :** Mettre $X(p)$ sous la forme :

$$X(p) = \frac{A}{p} + \frac{B(p+2) + C}{(p+2)^2 + 3^2}$$

en déterminant les constantes réelles A, B et C.

3. **Réponse temporelle :** En déduire l'expression du déplacement $x(t)$ pour $t \geq 0$ et indiquer la position d'équilibre finale du système.

EXERCICE 2 Réponse d'un circuit RLC série à un créneau de tension.
On considère un circuit électrique série composé d'une résistance $R = 20\ \Omega$, d'une inductance $L = 1$ H et d'un condensateur de capacité $C = 5$ mF).
Le circuit est initialement au repos : à $t = 0$, la tension aux bornes du condensateur est nulle ($u_C(0) = 0$) et l'intensité du courant dans la branche est nulle ($i(0) = 0$, soit $u_C'(0) = 0$).
On applique aux bornes de l'ensemble une impulsion rectangulaire (créneau) d'amplitude $E = 10$ V et de durée $t_0 = 2$ s, modélisée par la fonction causale :

$$e(t) = E\big(u(t) - u(t - t_0)\big) = 20\big(u(t) - u(t-2)\big)$$

où $u(t)$ désigne l'échelon unité de Heaviside.

1. **Équation différentielle :** À l'aide de la loi des mailles et des relations caractéristiques des dipôles ($u_R = Ri$, $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$), établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur, puis remplacer les composants par leurs valeurs numériques.

2. **Transformée de Laplace :** Déterminer $U_C(p) = \mathscr{L}\{u_C(t)\}$ en fonction de p et de e^{-2p}.

3. **Décomposition et transformée inverse :**

   (a) Décomposer la fraction rationnelle $H(p) = \dfrac{1000}{p\big((p+10)^2 + 10^2\big)}$ sous la forme :

$$H(p) = \frac{A}{p} + \frac{B(p+10) + D}{(p+10)^2 + 10^2}$$

   (b) En utilisant le théorème du retard ($\mathscr{L}\{g(t-t_0)u(t-t_0)\} = e^{-pt_0}G(p)$), en déduire l'expression temporelle de $u_C(t)$ pour $t \geq 0$ (on distinguera les intervalles $0 \leq t < 2$ et $t \geq 2$).

Corrigé détaillé de l'exercice 1

1. Expression de $X(p)$

En remplaçant $m = 1$, $c = 4$, $k = 13$ et $F_0 = 26$, l'équation devient :

$$x''(t) + 4x'(t) + 13x(t) = 26\,u(t)$$

On applique la transformée de Laplace à chaque membre avec $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ et $\mathscr{L}\{u(t)\} = \dfrac{1}{p}$:

$$(p^2 + 4p + 13)X(p) = \frac{26}{p}$$

On isole $X(p)$ et on écrit le trinôme sous forme canonique : $p^2+4p+13 = (p+2)^2+9 = (p+2)^2+3^2$.

$$X(p) = \frac{26}{p\big((p+2)^2 + 3^2\big)}$$

2. Décomposition en éléments simples

On cherche A, B et C tels que :

$$\frac{26}{p\big((p+2)^2 + 3^2\big)} = \frac{A}{p} + \frac{B(p+2) + C}{(p+2)^2 + 3^2}$$

- **Calcul de A :** On multiplie par p et on évalue en $p = 0$:

$$A = \frac{26}{0^2 + 4(0) + 13} = \frac{26}{13} = 2$$

- **Calcul de B et C :** On met au même dénominateur et on identifie les numérateurs :

$$26 = A\big(p^2 + 4p + 13\big) + p\big(Bp + 2B + C\big)$$
$$26 = (A + B)p^2 + (4A + 2B + C)p + 13A$$

  Par identification des puissances de p :

  - Terme en p^2 : $A + B = 0 \implies B = -A = -2$.
  - Terme en p : $4A+2B+C = 0 \implies 4(2)+2(-2)+C = 0 \implies 4+C = 0 \implies C = -4$.

On obtient donc :

$$X(p) = \frac{2}{p} - 2\frac{p+2}{(p+2)^2 + 3^2} - \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{(p+2)^2 + 3^2}$$

3. Déplacement temporel $x(t)$ et régime permanent

Par linéarité et d'après le théorème de l'amortissement ($\mathscr{L}\{e^{-at}g(t)\} = G(p+a)$) :

- $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{p}\right\} = 2u(t)$
- $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{p+2}{(p+2)^2 + 3^2}\right\} = e^{-2t}\cos(3t)\,u(t)$

- $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{(p+2)^2+3^2}\right\} = e^{-2t}\sin(3t)\,u(t)$

Le déplacement de la suspension pour $t \geq 0$ est donc :

$$x(t) = 2 - e^{-2t}\left(2\cos(3t) + \frac{4}{3}\sin(3t)\right) \quad \text{(en mètres)}$$

- **Position d'équilibre finale :** Lorsque $t \to +\infty$, le terme exponentiel e^{-2t} tend vers 0. Le système se stabilise à $x_\infty = 2$ m.

Corrigé détaillé de l'exercice 2

1. Mise en équation par la loi des mailles

D'après la loi des mailles, la somme des tensions aux bornes des trois dipôles est égale à la tension appliquée :

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = e(t)$$

Or, les relations caractéristiques des dipôles donnent :

$$\begin{aligned} i(t) &= C\,u_C'(t) \\ u_R(t) &= R\,i(t) = RC\,u_C'(t) \\ u_L(t) &= L\,i'(t) = LC\,u_C''(t) \end{aligned}$$

En remplaçant dans la loi des mailles, on obtient :

$$\boxed{LC\,u_C''(t) + RC\,u_C'(t) + u_C(t) = e(t)}$$

Avec les valeurs numériques des composants :

$$LC = 1 \times 5 \times 10^{-3} = 0{,}005$$

$$RC = 20 \times 5 \times 10^{-3} = 0{,}1$$

L'équation différentielle devient donc :

$$0{,}005\,u_C''(t) + 0{,}1\,u_C'(t) + u_C(t) = 10\big(u(t) - u(t-2)\big)$$

En multipliant les deux membres par 200, on obtient l'équation différentielle sous forme normalisée :

$$\boxed{u_C''(t) + 20\,u_C'(t) + 200\,u_C(t) = 2000\big(u(t) - u(t-2)\big)}$$

2. Transformée de Laplace $U_C(p)$

On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle :

$$u_C''(t) + 20\,u_C'(t) + 200\,u_C(t) = 2000\big(u(t) - u(t-2)\big)$$

Les conditions initiales étant nulles, on utilise :

$$\mathscr{L}\{u'_C(t)\} = pU_C(p)$$
$$\mathscr{L}\{u''_C(t)\} = p^2U_C(p)$$

D'autre part, la transformée de Laplace de l'échelon unité retardé est :

$$\mathscr{L}\{u(t-2)\} = \frac{e^{-2p}}{p}$$

On obtient ainsi :

$$p^2U_C(p) + 20pU_C(p) + 200U_C(p) = 2000\left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-2p}}{p}\right)$$

En factorisant puis en isolant $U_C(p)$:

$$U_C(p) = \frac{2000(1-e^{-2p})}{p(p^2+20p+200)}$$

Or :

$$p^2 + 20p + 200 = (p+10)^2 + 100 = (p+10)^2 + 10^2$$

Finalement :

$$\boxed{U_C(p) = \frac{2000(1-e^{-2p})}{p\big((p+10)^2+10^2\big)}}$$

En posant :

$$H(p) = \frac{2000}{p\big((p+10)^2+10^2\big)}$$

on peut également écrire :

$$\boxed{U_C(p) = H(p)(1-e^{-2p})}$$

3. Décomposition en éléments simples et réponse temporelle

a) Décomposition de $H(p)$

On cherche A, B et D tels que :

$$\frac{2000}{p\big((p+10)^2+10^2\big)} = \frac{A}{p} + \frac{B(p+10)+D}{(p+10)^2+10^2}$$

- **Calcul de A :** On multiplie par p et on évalue en $p=0$:

$$A = \frac{2000}{10^2+10^2} = \frac{2000}{200} = 10$$

- **Calcul de B et D :** Par réduction au même dénominateur :

$$2000 = A(p^2+20p+200) + p(Bp+10B+D)$$
$$2000 = (A+B)p^2 + (20A+10B+D)p + 200A$$

Par identification :

- En p^2 : $A+B=0 \implies B=-10$.
- En p : $20\times 10 + 10\times(-10) + D = 0 \implies 100+D=0 \implies D=-100$.

Ainsi :

$$H(p) = \frac{10}{p} - 10\times\frac{p+10}{(p+10)^2+10^2} - 10\times\frac{10}{(p+10)^2+10^2}$$

b) Expression temporelle de $u_C(t)$

Par transformée inverse, l'original $h(t) = \mathscr{L}^{-1}\{H(p)\}$ vaut pour $t \geq 0$:

$$h(t) = 10\Big(1 - e^{-10t}\big(\cos(10t) + \sin(10t)\big)\Big)u(t)$$

Puisque $U_C(p) = H(p) - e^{-2p}H(p)$, le théorème du retard donne :

$$u_C(t) = h(t) - h(t-2)$$

On distingue alors deux intervalles de temps :

- **Pendant l'impulsion ($0 \leq t < 2$ s) :** $u(t-2) = 0$, donc le condensateur se charge de manière oscillante amortie vers 10 V :

$$u_C(t) = 10\Big(1 - e^{-10t}\big(\cos(10t) + \sin(10t)\big)\Big) \quad \text{(en volts)}$$

- **Après la coupure du créneau ($t \geq 2$ s) :** le condensateur présente un régime oscillatoire amorti autour de 0 V : :

$$u_C(t) = 10\Big[e^{-10(t-2)}\big(\cos(10(t-2)) + \sin(10(t-2))\big) - e^{-10t}\big(\cos(10t) + \sin(10t)\big)\Big]$$