1 Rappels sur les probabilités et les événements

EXERCICE 1 On lance un dé équilibré à six faces.

1. Décrire l'univers Ω.
2. On considère A : « obtenir un multiple de 3 » et B : « obtenir un nombre impair ». Décrire A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.
3. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.
4. Calculer $P(A \cup B)$ de deux façons.
5. Déterminer la probabilité de ne pas obtenir un multiple de 3.

EXERCICE 2 Une urne contient 5 boules rouges, 3 boules bleues et 2 boules vertes, indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard.

1. Déterminer la probabilité de tirer une boule rouge.
2. Déterminer la probabilité de tirer une boule qui n'est pas bleue.
3. Les événements « tirer une boule rouge » et « tirer une boule verte » sont-ils incompatibles ?

2 Variable aléatoire et loi de probabilité

EXERCICE 3 On lance deux fois une pièce équilibrée. On note X le nombre de fois où l'on obtient Pile.

1. Énumérer les issues possibles.
2. Quelles sont les valeurs prises par X ?
3. Construire la loi de probabilité de X.
4. Calculer $P(X \geqslant 1)$ et $P(X = 2)$.

EXERCICE 4 Une variable aléatoire X prend les valeurs -1, 0, 2 et 5. On sait que

$$P(X = -1) = 0{,}2, \quad P(X = 0) = 0{,}35, \quad P(X = 2) = 0{,}3.$$

1. Déterminer $P(X = 5)$.
2. Calculer $P(X \leqslant 2)$.
3. Calculer $P(X \neq 0)$.

3 Loi uniforme et espérance

EXERCICE 5 Une roue comporte 8 secteurs de même taille numérotés de 1 à 8. On la fait tourner et on note X le numéro obtenu.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$.
3. On gagne 2 euros si le numéro est pair et on perd 1 euro sinon. On note G le gain. Déterminer la loi de G et son espérance.

EXERCICE 6 Un jeu consiste à tirer au hasard une carte parmi 10 cartes numérotées de 1 à 10. Le gain est égal au numéro tiré en euros, diminué d'une participation de 6 euros.

1. Déterminer les valeurs possibles du gain X.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Le jeu est-il favorable au joueur ?
4. Quel devrait être le montant de la participation pour que le jeu soit équitable ?

4 Épreuve et loi de Bernoulli

EXERCICE 7 Dans une population, 12 % des personnes sont gauchères. On choisit une personne au hasard et on note $X = 1$ si elle est gauchère, $X = 0$ sinon.

1. Justifier que X suit une loi de Bernoulli.
2. Préciser son paramètre.
3. Donner la loi de probabilité de X.
4. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.
5. Calculer l'écart-type de X.

EXERCICE 8 Un joueur réussit un tir avec une probabilité de 0,7. Il gagne 5 points en cas de réussite et perd 2 points en cas d'échec. On note G son gain.

1. Donner les valeurs possibles de G et leurs probabilités.
2. Calculer l'espérance de G.
3. Le jeu est-il favorable au joueur ?

5 Schéma de Bernoulli et loi binomiale

EXERCICE 9 Un questionnaire comporte 10 questions indépendantes. Pour chaque question, un élève répond au hasard parmi quatre propositions, une seule étant correcte. On note X le nombre de réponses correctes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 3 bonnes réponses.
3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une bonne réponse.
4. Calculer le nombre moyen de bonnes réponses.

EXERCICE 10 Une entreprise fabrique des composants électroniques. La probabilité qu'un composant soit défectueux est 0,02. On prélève au hasard 20 composants, de manière indépendante. On note X le nombre de composants défectueux.

1. Identifier la loi suivie par X.
2. Calculer $P(X = 0)$.
3. Calculer $P(X \leqslant 1)$.
4. Calculer $P(X \geqslant 2)$.
5. Déterminer l'espérance de X et l'interpréter.
6. Calculer l'écart-type de X.

6 Coefficients binomiaux

EXERCICE 11 Calculer les coefficients binomiaux suivants :

$$\binom{5}{2}, \quad \binom{7}{3}, \quad \binom{8}{4}, \quad \binom{10}{1}, \quad \binom{10}{9}.$$

Pour chacun, préciser une interprétation en termes de choix.

EXERCICE 12 Une association compte 12 membres. Elle doit désigner un président, un trésorier et un secrétaire.

1. Le nombre de choix est-il donné par un coefficient binomial ? Justifier.
2. On souhaite maintenant choisir trois membres pour former une délégation, sans rôle particulier. Exprimer le nombre de délégations possibles à l'aide d'un coefficient binomial, puis le calculer.

EXERCICE 13 On considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(8\,;0{,}3)$.

1. Écrire la formule donnant $P(X = 4)$.
2. Calculer cette probabilité.
3. Expliquer le rôle de chacun des trois facteurs dans la formule.

7 Probabilités conditionnelles et répétitions d'expériences

EXERCICE 14 Dans une entreprise, 40 % des salariés utilisent les transports en commun. Parmi eux, 70 % arrivent à l'heure. Parmi les salariés qui n'utilisent pas les transports en commun, 90 % arrivent à l'heure. On choisit un salarié au hasard. On note T l'événement « utiliser les transports en commun » et H l'événement « arriver à l'heure ».

1. Construire un arbre pondéré.
2. Calculer $P(T \cap H)$.
3. Calculer $P(H)$.
4. Calculer la probabilité qu'un salarié utilise les transports en commun sachant qu'il est arrivé à l'heure.

EXERCICE 15 On lance deux fois de suite un dé équilibré. On note A l'événement « obtenir un nombre pair au premier lancer » et B l'événement « obtenir un nombre pair au second lancer ».

1. Calculer $P(A)$ et $P(B)$.
2. Calculer $P(A \cap B)$.
3. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un nombre impair.

8 Loi géométrique

EXERCICE 16 Un joueur de basket réussit un lancer franc avec une probabilité de 0,75. Les lancers sont supposés indépendants. Il lance jusqu'à sa première réussite. On note X le rang de son premier lancer réussi.

1. Justifier que X suit une loi géométrique et préciser son paramètre.
2. Calculer la probabilité de réussir dès le premier lancer.
3. Calculer la probabilité de réussir pour la première fois au troisième lancer.
4. Calculer la probabilité de ne réussir aucun des quatre premiers lancers.
5. Déterminer le nombre moyen de lancers nécessaires avant une réussite.

EXERCICE 17 Un composant électronique fonctionne correctement lors d'un contrôle avec une probabilité de 0,9. Les contrôles sont indépendants et l'on recommence jusqu'à détecter un composant défectueux. On note X le rang du premier contrôle révélant un défaut.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer $P(X = 2)$.
3. Calculer la probabilité que les cinq premiers contrôles ne révèlent aucun défaut.
4. Calculer la probabilité qu'un défaut soit détecté au plus tard au quatrième contrôle.

9 Lois à densité : uniforme et exponentielle

EXERCICE 18 Un bus passe à un arrêt toutes les 20 minutes. On suppose que l'arrivée d'un voyageur est uniformément répartie entre deux passages. On note X son temps d'attente, en minutes.

1. Quelle loi peut-on utiliser pour modéliser X ? Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité d'attendre moins de 5 minutes.
3. Calculer la probabilité d'attendre entre 8 et 12 minutes.
4. Déterminer le temps d'attente moyen.
5. Calculer la variance de X.

EXERCICE 19 La durée de vie, en années, d'un équipement est modélisée par une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}1$.

1. Donner l'expression de sa densité pour $x \geqslant 0$.
2. Calculer la probabilité que l'équipement fonctionne encore après 5 ans.
3. Calculer la probabilité que sa durée de vie soit inférieure à 3 ans.
4. Calculer la probabilité que sa durée de vie soit comprise entre 2 et 6 ans.
5. Déterminer sa durée de vie moyenne.

EXERCICE 20 Le temps d'attente, en minutes, avant l'arrivée d'un appel suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$.

1. Calculer la probabilité d'attendre plus de 10 minutes.
2. Calculer la probabilité d'attendre moins de 4 minutes.
3. Sachant que l'on a déjà attendu 5 minutes, quelle est la probabilité d'attendre encore plus de 10 minutes ?
4. Interpréter le résultat de la question précédente.