

2_{pts} **Soin :** écriture lisible, régulière, traits au crayon et à la règle, exercices séparés clairement.

3_{pts} **EXERCICE 1** A l'aide de la calculatrice donner la valeur exacte de U_5 dans les trois cas suivants :

1. En sachant que $U_n = 3n + 1$

$$\text{On a : } U_5 = 3 \times 5 + 1 = 15 + 1 = 16$$

2. En sachant que $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 2U_n + 3$

$$\text{On doit calculer les termes précédents : } U_1 = 2 \times 1 + 3 = 5 \text{ puis } U_2 = 2 \times 5 + 3 = 13 \text{ puis } U_3 = 2 \times 13 + 3 = 29 \text{ puis } U_4 = 2 \times 29 + 3 = 61 \text{ et enfin } U_5 = 2 \times 61 + 3 = 125$$

3. En sachant que $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = 3U_n + 2n + 1$

On doit calculer les termes précédents mais c'est un peu plus subtil :

$$U_1 = U_{0+1} = 3 \times 0 + 2 \times 0 + 1 = 1$$

$$U_2 = U_{1+1} = 3 \times 1 + 2 \times 1 + 1 = 6$$

$$U_3 = U_{2+1} = 3 \times 6 + 2 \times 2 + 1 = 23$$

$$U_4 = U_{3+1} = 3 \times 23 + 2 \times 3 + 1 = 76$$

$$U_5 = U_{4+1} = 3 \times 76 + 2 \times 4 + 1 = 237$$

4_{pts} **EXERCICE 2** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne : $U_n = 5n + 4$

1. Calculer U_0 , U_1 , U_2 , U_3 .

$$U_0 = 5 \times 0 + 4 = 4, \quad U_1 = 5 \times 1 + 4 = 9, \quad U_2 = 5 \times 2 + 4 = 14, \quad U_3 = 5 \times 3 + 4 = 19$$

2. Exprimer U_{n+1} en fonction de n

$$U_{n+1} = 5 \times (n + 1) + 4 = 5n + 5 + 4 = 5n + 9$$

3. En déduire que $U_{n+1} - U_n = 5$

$$U_{n+1} - U_n = (5n + 9) - (5n + 4) = 5n + 9 - 5n - 4 = 5$$

4. A quelle famille appartient cette suite (U_n) ? Quelle est sa raison ?

Puisque pour tout entier naturel n , on a : $U_{n+1} - U_n = 5$ la suite U est arithmétique, de raison 5

5. Écrire alors sa définition récursive.

Sa définition récursive est alors $U_0 = 4$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = U_n + 5$

3 pts **EXERCICE 3** Sachant que U est arithmétique, que $U_5 = 45$ et que $U_{10} = 125$,

1. Rappeler la définition explicite ou directe d'une suite arithmétique.

Dans le cours, cette définition est : pour tout entier naturel n , $U_n = U_0 + n \times R$

2. Montrer que $R = 16$ puis calculer U_0

Comme $U_{10} = 125$ cela donne $U_0 + 10R = 125$ donc $U_0 = 125 - 10R$

Comme $U_5 = 45$ cela donne $U_0 + 5R = 45$ donc $U_0 = 45 - 5R$

On a donc l'égalité $125 - 10R = 45 - 5R$ donc $125 - 45 = -5R + 10R$ donc $5R = 80$ donc $R = \frac{80}{5}$ c'est à dire $R = 16$

Comme on avait $U_0 = 125 - 10R$ cela donne $U_0 = -35$

3. Montrer que $U_{32} = 477$

Puisque pour tout entier naturel n , $U_n = U_0 + n \times R$, cela donne : $U_{32} = -35 + 32 \times 16$ donc $U_{32} = 477$

4. Combien y a-t-il de termes de U_0 à U_{32} ?

Comme on commence à compter à partir de 0, il y a 33 termes.

5. En déduire la valeur exacte de la somme $S = U_0 + \dots + U_{32}$

D'après le cours, $S = \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2} \times \text{nbde termes}$

cela donne $S = \frac{-35 + 477}{2} \times 33 = 7293$

4 pts **EXERCICE 4** On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 8$.

1. Calculer U_1 et U_2 .

On calcule $U_1 = \frac{1}{3} \times 3 + 8 = 1 + 8 = 9$ et $U_2 = \frac{1}{3} \times 9 + 8 = 3 + 8 = 11$

2. Expliquer pourquoi la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

$$U_1 - U_0 = 6 \quad \text{et} \quad U_2 - U_1 = 2$$

Ces nombres sont différents, la suite ne peut pas être arithmétique.

$$\frac{U_1}{U_0} = 3 \quad \text{et} \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{11}{9} \approx 1,2$$

Ces nombres sont différents, la suite ne peut pas être géométrique.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - 12$. Montrer que la suite (V_n) est géométrique. Donner sa raison et son premier terme V_0

Pour tout entier naturel n , on a :

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 12 \quad \text{puis} \quad V_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 8 - 12 \text{ donc } V_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 4$$

$$\text{or } V_n = U_n - 12 \text{ donc } U_n = V_n + 12 \text{ donc } V_{n+1} = \frac{1}{3}(V_n + 12) - 4$$

$$\text{En développant cela donne : } V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n + 4 - 4 \text{ c'est à dire } V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$$

La suite V est alors géométrique, de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 12 = -9$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire V_n puis U_n en fonction de n

D'après ce qui précède, pour tout entier naturel n , on a : $V_n = -9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

or on a vu que $U_n = V_n + 12$ donc $U_n = -9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 12$

4pts **EXERCICE 5**

Au 1^{er} janvier 2026, un arboriculteur possède 5 000 pommiers. Chaque année :

- il arrache 4 % des pommiers car ils sont endommagés ;
- il replante 300 nouveaux pommiers.

On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n , u_n représente le nombre de pommiers possédés par l'arboriculteur au 1^{er} janvier de l'année $(2026 + n)$.

On obtient ainsi une suite (u_n) telle que : $u_0 = 5\,000$ et $u_{n+1} = 0,96u_n + 300$, pour tout entier naturel n .

1. Calculer u_1 et u_2 .

On calcule $u_1 = 5100$ et $u_2 = 5196$

Combien de pommiers possèdera l'arboriculteur au 1^{er} janvier 2027 ?

En 2027, on aura $n = 1$ donc 5100 pommiers.

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 7\,500$, pour tout entier naturel n .

- (a) Montrer que $v_{n+1} = 0,96v_n$. En déduire la famille à laquelle appartient la suite (v_n) . On précisera la raison et le premier terme v_0 .

$$\begin{aligned}\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ on a : } v_{n+1} &= u_{n+1} - 7\,500 \\ &= 0,96u_n + 300 - 7\,500 \\ &= 0,96u_n - 7\,200 \\ &= 0,96(v_n + 7\,500) - 7\,200 \\ &= 0,96v_n + 7\,200 - 7\,200 \\ &= 0,96v_n\end{aligned}$$

La suite v est donc géométrique,

de raison $q = 0,96$ et de 1er terme $v_0 = u_0 - 7\,500 = -2\,500$

- (b) Donner la définition directe de la suite (v_n) .

D'après le cours, on a : $v_n = -2\,500 \times (0,96)^n$

- (c) En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 7\,500 - 2\,500 \times 0,96^n$.

On a vu que $u_n = v_n + 7\,500$ donc $u_n = 7\,500 - 2\,500 \times 0,96^n$