On considère la suite définie par $U_0 = 21$ et $U_{n+1} = \dfrac{2}{3}U_n + 5$

1. Calculer U_1, U_2 et U_3
   $U_1 = 19$ puis $U_2 = \dfrac{53}{3} \approx 17,7$ et $U_3 = \dfrac{151}{9} \approx 16,8$
2. Démontrer que la suite (U_n) est décroissante et minorée. Que peut-on en conclure ?
   Soit H_n la proposition "$0 < U_n \leqslant U_{n+1}$"
   $U_0 = 21$ et $U_1 = 19$ donc H_0 est vraie.
   Soit $n \in \mathbb{N}$, si H_n est vraie alors pour cet entier n on a : $0 < U_n \leqslant U_{n+1}$
   donc $0 < \dfrac{2}{3}U_n \leqslant \dfrac{2}{3}U_{n+1}$
   puis $0 < 5 < \dfrac{2}{3}U_n + 5 \leqslant \dfrac{2}{3}U_{n+1} + 5$
   donc $0 < U_{n+1} \leqslant U_{n+2}$
   donc H_{n+1} est vraie.
   H_0 est vraie
   et pour tout $n \in \mathbb{N}$ si H_n est vraie alors H_{n+1} aussi
   donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est vraie
   donc (U_n) est décroissante et minorée par 0.
   D'après le théorème fondamental, la suite (U_n) converge vers un réel $L \geqslant 0$

Soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_n - 15$

3. Montrer que (V_n) est géométrique. Préciser sa raison, son premier terme.
   $V_{n+1} = U_{n+1} - 15 = \dfrac{2}{3}U_n + 5 - 15 = \dfrac{2}{3}U_n - 10 = \dfrac{2}{3}(V_n + 15) - 10 = \dfrac{2}{3}V_n + 10 - 10 = \dfrac{2}{3}V_n$
   Donc (V_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$ et de premier terme $V_0 = 21 - 15 = 6$
4. En déduire V_n puis U_n en fonction de n
   D'après le cours $V_n = V_0 \times q^n = 6 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ puis comme $U_n = V_n + 15$, on a : $U_n = 15 + 6 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
5. Déterminer la limite L de U_n en $+\infty$
   Puisque $q = \left(\dfrac{2}{3}\right)$ vérifie $|q| < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 15$
6. Déterminer par la calcul le premier entier n pour lequel la différence entre U_n et L devient inférieure à 10^{-5}
   $U_n - 15 = 6 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n > 0$ donc on résout : $6 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n < 10^{-5}$
   C'est à dire $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n < \dfrac{1}{600000}$ puis $n\ln(\frac{2}{3}) < \ln\dfrac{1}{600000}$
   et enfin $n > \dfrac{-\ln 600000}{\ln(\frac{2}{3})}$. Le premier n enfin qui convient est $n = 33$.

7. Démontrer que $S_n = U_0 + \cdots + U_n = 15n + 33 - \dfrac{2^{n+2}}{3^{n-1}}$

$U_n = 15 + 6 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{n} 15 + 6 \times \sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{2}{3}\right)^k$

de 0 à n il y a $(n+1)$ termes donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 15 = 15(n+1) = 15n + 15$

par ailleurs $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{2}{3}\right)^k = 1 \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{2}{3}} = 3\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$

donc $S_n = U_0 + \cdots + U_n = 15n + 15 + 18 - 2 \times 9 \times \dfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}}$

C'est à dire : $S_n = U_0 + \cdots + U_n = 15n + 33 - \dfrac{2^{n+2}}{3^{n-1}}$